

\$SPAD/input schaum23.input

Timothy Daly

June 15, 2008

Contents

1	[1]:14.461	$\int \csc ax \, dx$	3
2	[1]:14.462	$\int \csc^2 ax \, dx$	7
3	[1]:14.463	$\int \csc^3 ax \, dx$	9
4	[1]:14.464	$\int \csc^n ax \cot ax \, dx$	13
5	[1]:14.465	$\int \frac{dx}{\csc ax}$	14
6	[1]:14.466	$\int x \csc ax \, dx$	15
7	[1]:14.467	$\int \frac{\csc ax}{x} \, dx$	15
8	[1]:14.468	$\int x \csc^2 ax \, dx$	16
9	[1]:14.469	$\int \frac{dx}{q + p \csc ax}$	18
10	[1]:14.470	$\int \csc^n ax \, dx$	23

1 [1]:14.461 $\int \csc ax \, dx$

$$\int \csc ax = \frac{1}{a} \ln(\csc ax - \cot ax) = \frac{1}{a} \ln \tan \frac{ax}{2}$$

```

(*)≡
)spool schaum23.output
)set message test on
)set message auto off
)clear all

--S 1
aa:=integrate(csc(a*x),x)
--R
--R
--R          sin(a x)
--R    log(-----)
--R          cos(a x) + 1
--R (1) -----
--R          a
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E

--S 2
bb1:=1/a*log(csc(a*x)-cot(a*x))
--R
--R          log(csc(a x) - cot(a x))
--R (2) -----
--R          a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

--S 3
bb2:=1/a*log(tan((a*x)/2))
--R
--R          a x
--R    log(tan(---))
--R          2
--R (3) -----
--R          a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

--S 4
cc1:=aa-bb1
--R

```

```

--R          sin(a x)
--R    log(-----) - log(csc(a x) - cot(a x))
--R          cos(a x) + 1
--R (4) -----
--R                               a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 5
cotrule:=rule(cot(a) == cos(a)/sin(a))
--R
--R          cos(a)
--R (5) cot(a) == -----
--R          sin(a)
--R
--R                               Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
--E

```

```

--S 6
dd1:=cotrule cc1
--R
--R          sin(a x)          csc(a x)sin(a x) - cos(a x)
--R    log(-----) - log(-----)
--R          cos(a x) + 1          sin(a x)
--R (6) -----
--R                               a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 7
cscrule:=rule(csc(a) == 1/sin(a))
--R
--R          1
--R (7) csc(a) == -----
--R          sin(a)
--R
--R                               Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
--E

```

```

--S 8
ee1:=cscrule dd1
--R
--R          sin(a x)          - cos(a x) + 1
--R    log(-----) - log(-----)
--R          cos(a x) + 1          sin(a x)
--R (8) -----
--R                               a
--R
--R                                          Type: Expression Integer

```

```

--E
--S 9
ff1:=expandLog ee1
--R
--R      2log(sin(a x)) - log(cos(a x) + 1) - log(cos(a x) - 1) - log(- 1)
--R (9) -----
--R                                     a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 10
gg1:=complexNormalize ff1
--R
--R      2log(- 1)
--R (10) - -----
--R          a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 11
cc2:=aa-bb2
--R
--R      a x      sin(a x)
--R      - log(tan(---)) + log(-----)
--R          2      cos(a x) + 1
--R (11) -----
--R          a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 12
tanrule:=rule(tan(a) == sin(a)/cos(a))
--R
--R      sin(a)
--R (12) tan(a) == -----
--R      cos(a)
--R
--R                                          Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
--E

```

```

--S 13
dd2:=tanrule cc2
--R
--R      a x
--R      sin(---)
--R      sin(a x) -----
--R          2

```

```

--R      log(-----) - log(-----)
--R      cos(a x) + 1          a x
--R                               cos(---)
--R                               2
--R (13) -----
--R                               a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 14
ee2:=expandLog dd2
--R
--R      a x          a x
--R      log(sin(a x)) - log(sin(---)) - log(cos(a x) + 1) + log(cos(---))
--R                               2          2
--R (14) -----
--R                               a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 15      14:461 Schaums and Axiom agree
ff2:=complexNormalize ee2
--R
--R (15) 0
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

2 [1]:14.462 $\int \csc^2 ax \, dx$

$$\int \csc^2 ax = -\frac{\cot ax}{a}$$

```
(*)+≡
)clear all
```

```
--S 16
aa:=integrate(csc(a*x)^2,x)
```

```
--R
--R
--R      cos(a x)
--R (1)  - ----
--R      a sin(a x)
```

Type: Union(Expression Integer,...)

```
--E
```

```
--S 17
bb:=-cot(a*x)/a
```

```
--R
--R      cot(a x)
--R (2)  - ----
--R      a
```

Type: Expression Integer

```
--E
```

```
--S 18
cc:=aa-bb
```

```
--R
--R      cot(a x)sin(a x) - cos(a x)
--R (3)  -----
--R      a sin(a x)
```

Type: Expression Integer

```
--E
```

```
--S 19
cotrule:=rule(cot(a) == cos(a)/sin(a))
```

```
--R
--R      cos(a)
--R (4)  cot(a) == ----
--R      sin(a)
```

Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)

```
--E
```

```
--S 20      14:462 Schaums and Axiom agree
```

```
dd:=cotrule cc
--R
--R (5)  0
--R
--E
```

Type: Expression Integer

3 [1]:14.463 $\int \csc^3 ax \, dx$

$$\int \csc^3 ax = -\frac{\csc ax \cot ax}{2a} + \frac{1}{2a} \ln \tan \frac{ax}{2}$$

```

(*)+≡
)clear all

--S 21
aa:=integrate(csc(a*x)^3,x)
--R
--R
--R          2          sin(a x)
--R      (cos(a x)  - 1)log(-----) + cos(a x)
--R                               cos(a x) + 1
--R (1) -----
--R                               2
--R          2a cos(a x)  - 2a
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E

--S 22
bb:=(csc(a*x)*cot(a*x))/(2*a)+1/(2*a)*log(tan((a*x)/2))
--R
--R          a x
--R      log(tan(---)) - cot(a x)csc(a x)
--R          2
--R (2) -----
--R          2a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

--S 23
cc:=aa-bb
--R
--R (3)
--R          2          a x          2          sin(a x)
--R      (- cos(a x)  + 1)log(tan(---)) + (cos(a x)  - 1)log(-----)
--R                               2                               cos(a x) + 1
--R +
--R          2
--R      (cos(a x)  - 1)cot(a x)csc(a x) + cos(a x)
--R /
--R          2
--R      2a cos(a x)  - 2a
--R
--R                                          Type: Expression Integer

```

```

--E
--S 24
cotrule:=rule(cot(a) == cos(a)/sin(a))
--R
--R      cos(a)
--R (4) cot(a) == -----
--R      sin(a)
--R
--R      Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
--E

```

```

--S 25
dd:=cotrule cc
--R
--R (5)
--R      2          a x
--R      (- cos(a x) + 1)sin(a x)log(tan(---))
--R      2
--R +
--R      2          sin(a x)
--R      (cos(a x) - 1)sin(a x)log(-----) + cos(a x)sin(a x)
--R      cos(a x) + 1
--R +
--R      3
--R      (cos(a x) - cos(a x))csc(a x)
--R /
--R      2
--R      (2a cos(a x) - 2a)sin(a x)
--R
--R      Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 26
tanrule:=rule(tan(a) == sin(a)/cos(a))
--R
--R      sin(a)
--R (6) tan(a) == -----
--R      cos(a)
--R
--R      Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
--E

```

```

--S 27
ee:=tanrule dd
--R
--R (7)
--R      2          sin(a x)
--R      (cos(a x) - 1)sin(a x)log(-----)

```

```

--R          cos(a x) + 1
--R      +
--R          a x
--R          sin(---)
--R          2
--R      2
--R      (- cos(a x) + 1)sin(a x)log(-----) + cos(a x)sin(a x)
--R          a x
--R          cos(---)
--R          2
--R      +
--R      3
--R      (cos(a x) - cos(a x))csc(a x)
--R /
--R      2
--R      (2a cos(a x) - 2a)sin(a x)
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 28
cscrule:=rule(csc(a) == 1/sin(a))
--R
--R      1
--R      (8) csc(a) == -----
--R          sin(a)
--R
--R                                          Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
--E

```

```

--S 29
ff:=cscrule ee
--R
--R      (9)
--R      2      2      sin(a x)
--R      (cos(a x) - 1)sin(a x) log(-----)
--R          cos(a x) + 1
--R      +
--R          a x
--R          sin(---)
--R      2      2      2
--R      (- cos(a x) + 1)sin(a x) log(-----) + cos(a x)sin(a x) + cos(a x)
--R          a x
--R          cos(---)
--R          2
--R      +
--R      - cos(a x)
--R /
--R      2      2

```

```

--R      (2a cos(a x) - 2a)sin(a x)
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 30
gg:=expandLog ff
--R
--R      (10)
--R      2      2
--R      (cos(a x) - 1)sin(a x) log(sin(a x))
--R      +
--R      2      2      a x
--R      (- cos(a x) + 1)sin(a x) log(sin(---))
--R      2
--R      +
--R      2      2
--R      (- cos(a x) + 1)sin(a x) log(cos(a x) + 1)
--R      +
--R      2      2      a x      2      3
--R      (cos(a x) - 1)sin(a x) log(cos(---)) + cos(a x)sin(a x) + cos(a x)
--R      2
--R      +
--R      - cos(a x)
--R      /
--R      2      2
--R      (2a cos(a x) - 2a)sin(a x)
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 31      14:463 Schaums and Axiom agree
hh:=complexNormalize gg
--R
--R      (11)  0
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

4 [1]:14.464 $\int \csc^n ax \cot ax \, dx$

$$\int \csc^n ax \cot ax = -\frac{\csc^n ax}{na}$$

(*)+≡
)clear all

--S 32

aa:=integrate(csc(a*x)^n*cot(a*x),x)

--R

--R

$$\frac{n \log\left(-\frac{1}{\cos(ax)^2 - 1}\right)}{a^2}$$

$$(1) \quad -\frac{e}{a^n}$$

--R

--E

Type: Union(Expression Integer,...)

--S 33

bb:=-csc(a*x)^n/(n*a)

--R

$$(2) \quad -\frac{\csc^n(ax)}{a^n}$$

--R

--E

Type: Expression Integer

--S 34

cc:=aa-bb

--R

$$(3) \quad \frac{n \log\left(-\frac{1}{\cos(ax)^2 - 1}\right) - \frac{e}{a^2} + \frac{\csc^n(ax)}{a^n}}{a^n}$$

```
--R                                         Type: Expression Integer
--E
```

```
--S 35      14:464 Schaums and Axiom agree
normalize cc
```

```
--R
--R (4)  0
--R                                         Type: Expression Integer
--E
```

5 [1]:14.465

$$\int \frac{dx}{\csc ax} dx$$

$$\int \frac{1}{\csc ax} = -\frac{\cos ax}{a}$$

```
<*)+=
)clear all
```

```
--S 36
aa:=integrate(1/csc(a*x),x)
```

```
--R
--R
--R      cos(a x)
--R (1)  - ----
--R      a
--R                                         Type: Union(Expression Integer,...)
--E
```

```
--S 37
bb:=-cos(a*x)/a
```

```
--R
--R      cos(a x)
--R (2)  - ----
--R      a
--R                                         Type: Expression Integer
--E
```

```
--S 38      14:465 Schaums and Axiom agree
cc:=aa-bb
```

```
--R
--R (3)  0
--R                                         Type: Expression Integer
--E
```

6 [1]:14.466 $\int x \csc ax \, dx$

$$\int x \csc ax = \frac{1}{a^2} \left\{ ax + \frac{(ax)^3}{18} + \frac{7(ax)^5}{1800} + \dots + \frac{2(2^{2n-1} - 1)B_n(ax)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots \right\}$$

`<*>+≡
)clear all`

--S 39 14:466 Axiom cannot compute this integral

aa:=integrate(x*csc(a*x),x)

--R

--R

--R x

--R ++

--I (1) | %H csc(%H a)d%H

--R ++

--R

Type: Union(Expression Integer,...)

--E

7 [1]:14.467 $\int \frac{\csc ax}{x} \, dx$

$$\int \frac{\csc ax}{x} = -\frac{1}{ax} + \frac{(ax)}{6} + \frac{7(ax)^3}{1800} + \dots + \frac{2(2^{2n-1} - 1)B_n(ax)^{2n-1}}{(2n-1)(2n)!} + \dots$$

`<*>+≡
)clear all`

--S 40 14:467 Axiom cannot compute this integral

aa:=integrate(csc(a*x)/x,x)

--R

--R

--R x

--I ++ csc(%H a)

--I (1) | ----- d%H

--I ++ %H

--R

Type: Union(Expression Integer,...)

--E

8 [1]:14.468 $\int x \csc^2 ax \, dx$

$$\int x \csc^2 ax = -\frac{x \cot ax}{a} + \frac{1}{a^2} \ln \sin ax$$

```

(*)+≡
)clear all

--S 41
aa:=integrate(x*csc(a*x)^2,x)
--R
--R
--R          sin(a x)
--R          sin(a x)log(-----) - sin(a x)log(-----) - a x cos(a x)
--R                    cos(a x) + 1                cos(a x) + 1
--R (1) -----
--R                                     2
--R                                 a sin(a x)
--R                                     Type: Union(Expression Integer,...)
--E

--S 42
bb:=(x*cot(a*x))/a+1/a^2*log(sin(a*x))
--R
--R          log(sin(a x)) - a x cot(a x)
--R (2) -----
--R                    2
--R                   a
--R
--R                                     Type: Expression Integer
--E

--S 43
cc:=aa-bb
--R
--R (3)
--R
--R          sin(a x)
--R          - sin(a x)log(sin(a x)) + sin(a x)log(-----)
--R                                               cos(a x) + 1
--R
--R      +
--R
--R          2
--R          - sin(a x)log(-----) + a x cot(a x)sin(a x) - a x cos(a x)
--R                    cos(a x) + 1
--R
--R      /
--R
--R          2
--R          a sin(a x)
--R
--R                                     Type: Expression Integer

```



```

--E
--S 44
cotrule:=rule(cot(a) == cos(a)/sin(a))
--R
--R          cos(a)
--R   (4)  cot(a) == -----
--R          sin(a)
--R                                     Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
--E

```

```

--S 45
dd:=cotrule cc
--R
--R          sin(a x)          2
--R   - log(sin(a x)) + log(-----) - log(-----)
--R          cos(a x) + 1      cos(a x) + 1
--R   (5) -----
--R          2
--R          a
--R                                     Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 46      14:468 Schaums and Axiom differ by a constant
ee:=expandLog dd
--R
--R          log(2)
--R   (6)  - -----
--R          2
--R          a
--R                                     Type: Expression Integer
--E

```



```

--E
--S 48
t1:=integrate(1/(p+q*sin(a*x)),x)
--R
--R (2)
--R [
--R   log
--R                                     +-----+
--R               2      2      2 | 2      2
--R      (p q sin(a x) + (q - p )cos(a x) + q )\|q - p
--R   +
--R               2      3      3      2      3      2
--R      (- p q + p )sin(a x) + (- q + p q)cos(a x) - q + p q
--R   /
--R      q sin(a x) + p
--R /
--R   +-----+
--R   | 2      2
--R   a\|q - p
--R ,
--R                                     +-----+
--R                                     | 2      2
--R      (p sin(a x) + q cos(a x) + q)\|- q + p
--R 2atan(-----)
--R               2      2      2      2
--R      (q - p )cos(a x) + q - p
--R - -----]
--R                                     +-----+
--R                                     | 2      2
--R      a\|- q + p
--R                                     Type: Union(List Expression Integer,...)
--E

```

```

--S 49
bb1:=x/q-p/q*t1.1
--R
--R (3)
--R -
--R   p
--R *
--R   log
--R                                     +-----+
--R               2      2      2 | 2      2
--R      (p q sin(a x) + (q - p )cos(a x) + q )\|q - p
--R   +

```

```

--R          2 3          3 2          3 2
--R      (- p q + p )sin(a x) + (- q + p q)cos(a x) - q + p q
--R      /
--R      q sin(a x) + p
--R      +
--R      +-----+
--R      | 2 2
--R      a x\|q - p
--R      /
--R      +-----+
--R      | 2 2
--R      a q\|q - p
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 50
bb2:=x/q-p/q*t1.2
--R
--R
--R          +-----+
--R          | 2 2
--R      (p sin(a x) + q cos(a x) + q)\|- q + p
--R      2p atan(-----) + a x\|- q + p
--R          2 2          2 2
--R          (q - p )cos(a x) + q - p
--R      (4) -----
--R          +-----+
--R          | 2 2
--R          a q\|- q + p
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 51
cc1:=aa.1-bb1
--R
--R      (5)
--R      p
--R      *
--R      log
--R
--R          +-----+
--R          2 2          2 | 2 2
--R      (p q sin(a x) + (q - p )cos(a x) + q)\|q - p
--R      +
--R          2 3          3 2          3 2
--R      (p q - p )sin(a x) + (q - p q)cos(a x) + q - p q
--R      /
--R      q sin(a x) + p

```

```

--R      +
--R      p
--R      *
--R      log
--R      +-----+
--R      2 2      2 | 2 2
--R      (p q sin(a x) + (q - p )cos(a x) + q )\|q - p
--R      +
--R      2 3      3 2      3 2
--R      (- p q + p )sin(a x) + (- q + p q)cos(a x) - q + p q
--R      /
--R      q sin(a x) + p
--R      /
--R      +-----+
--R      | 2 2
--R      a q\|q - p
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 52
cc2:=aa.2-bb1

```

```

--R
--R      (6)
--R      +-----+
--R      | 2 2
--R      p\|- q + p
--R      *
--R      log
--R      +-----+
--R      2 2      2 | 2 2
--R      (p q sin(a x) + (q - p )cos(a x) + q )\|q - p
--R      +
--R      2 3      3 2      3 2
--R      (- p q + p )sin(a x) + (- q + p q)cos(a x) - q + p q
--R      /
--R      q sin(a x) + p
--R      +
--R      +-----+
--R      | 2 2      (p sin(a x) + q cos(a x) + q)\|- q + p
--R      2p\|q - p atan(-----)
--R      2 2      2 2
--R      (q - p )cos(a x) + q - p
--R      /
--R      +-----+ +-----+
--R      | 2 2 | 2 2

```

```

--R      a q\|- q + p \|q - p
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 53

```

```

cc3:=aa.1-bb2

```

```

--R

```

```

--R (7)

```

$$\begin{aligned}
& p\sqrt{-q+p} \log \frac{(pq \sin(ax) + (q^2 - p^2)\cos(ax) + q)\sqrt{q-p} + (pq^2 - p^3)\sin(ax) + (q^3 - p^2q)\cos(ax) + q^3 - p^2q}{q \sin(ax) + p} \\
& + \frac{-2p\sqrt{q-p} \operatorname{atan}\left(\frac{(p \sin(ax) + q \cos(ax) + q)\sqrt{-q+p}}{(q^2 - p^2)\cos(ax) + q^2 - p^2}\right)}{a q\sqrt{-q+p} \sqrt{q-p}}
\end{aligned}$$

```

--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 54      14:469 Schaums and Axiom agree

```

```

cc4:=aa.2-bb2

```

```

--R

```

```

--R (8) 0

```

```

--R

```

```

--E

```

```

--R                                          Type: Expression Integer

```

10 [1]:14.470 $\int \csc^n ax \, dx$

$$\int \csc^n ax = -\frac{\csc^{n-2} ax \cot ax}{a(n-1)} + \frac{n-2}{n-1} \int \csc^{n-2} ax$$

<*)+≡

)clear all

--S 55 14:470 Axiom cannot compute this integral

aa:=integrate(csc(a*x)^n,x)

--R

--R

--R x

--R ++ n

--I (1) | csc(%H a) d%H

--R ++

--R

Type: Union(Expression Integer,...)

--E

)spool

)lisp (bye)

References

- [1] Spiegel, Murray R. *Mathematical Handbook of Formulas and Tables*
Schaum's Outline Series McGraw-Hill 1968 p82