

\$SPAD/input schaum9.input

Timothy Daly

June 15, 2008

Contents

1	[1]:14.182	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}}$	3
2	[1]:14.183	$\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + a^2}}$	4
3	[1]:14.184	$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 + a^2}}$	5
4	[1]:14.185	$\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^2 + a^2}}$	7
5	[1]:14.186	$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + a^2}}$	8
6	[1]:14.187	$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2 + a^2}}$	10
7	[1]:14.188	$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2 + a^2}}$	11
8	[1]:14.189	$\int \sqrt{x^2 + a^2} dx$	13
9	[1]:14.190	$\int x\sqrt{x^2 + a^2} dx$	15
10	[1]:14.191	$\int x^2\sqrt{x^2 + a^2} dx$	16
11	[1]:14.192	$\int x^3\sqrt{x^2 + a^2} dx$	18
12	[1]:14.193	$\int \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{x} dx$	19
13	[1]:14.194	$\int \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{x^2} dx$	21
14	[1]:14.195	$\int \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{x^3} dx$	23
15	[1]:14.196	$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}}$	25

16 [1]:14.197	$\int \frac{x dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}}$	26
17 [1]:14.198	$\int \frac{x^2 dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}}$	27
18 [1]:14.199	$\int \frac{x^3 dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}}$	29
19 [1]:14.200	$\int \frac{dx}{x(x^2 + a^2)^{3/2}}$	30
20 [1]:14.201	$\int \frac{dx}{x^2(x^2 + a^2)^{3/2}}$	32
21 [1]:14.202	$\int \frac{dx}{x^3(x^2 + a^2)^{3/2}}$	33
22 [1]:14.203	$\int (x^2 + a^2)^{3/2} dx$	36
23 [1]:14.204	$\int x(x^2 + a^2)^{3/2} dx$	38
24 [1]:14.205	$\int x^2(x^2 + a^2)^{3/2} dx$	39
25 [1]:14.206	$\int x^3(x^2 + a^2)^{3/2} dx$	41
26 [1]:14.207	$\int \frac{(x^2 + a^2)^{3/2}}{x} dx$	43
27 [1]:14.208	$\int \frac{(x^2 + a^2)^{3/2}}{x^2} dx$	45
28 [1]:14.209	$\int \frac{(x^2 + a^2)^{3/2}}{x^3} dx$	47

1 [1]:14.182 $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}}$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2})$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \sinh^{-1} \frac{x}{a}$$

```

(*)≡
)spool schaum9.output
)set message test on
)set message auto off
)clear all

--S 1
aa:=integrate(1/(sqrt(x^2+a^2)),x)
--R
--R
--R          +-----+
--R          | 2    2
--R (1)  - log(\|x  + a  - x)
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E

--S 2
bb:=log(x+sqrt(x^2+a^2))
--R
--R          +-----+
--R          | 2    2
--R (2)  log(\|x  + a  + x)
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

--S 3
cc:=aa-bb
--R
--R          +-----+          +-----+
--R          | 2    2          | 2    2
--R (3)  - log(\|x  + a  + x) - log(\|x  + a  - x)
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

--S 4      14:182 Schaums and Axiom differ by a constant
dd:=complexNormalize cc
--R

```

```

--R      2
--R (4)  - log(a )
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

This is equal to $-\log(a^2)$ but Axiom cannot prove it.

2 [1]:14.183

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \sqrt{x^2 + a^2}$$

```

(*)+≡
)clear all

```

```

--S 5
aa:=integrate(x/(sqrt(x^2+a^2)),x)
--R
--R
--R      +-----+
--R      | 2  2  2  2
--R      - x\|x + a  + x + a
--R (1)  -----
--R      +-----+
--R      | 2  2
--R      \|x + a  - x
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E

```

```

--S 6
bb:=sqrt(x^2+a^2)
--R
--R      +-----+
--R      | 2  2
--R (2)  \|x + a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 7      14:183 Schaums and Axiom agree
cc:=aa-bb
--R
--R (3)  0
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

3 [1]:14.184 $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 + a^2}}$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \frac{x\sqrt{x^2 + a^2}}{2} - \frac{a^2}{2} \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2})$$

```
(*)+=
)clear all
```

```
--S 8
aa:=integrate(x^2/sqrt(x^2+a^2),x)
```

```
--R
--R
--R (1)
--R      +-----+
--R      2 | 2 2      2 2 4      | 2 2
--R      (2a x\|x + a - 2a x - a )log(\|x + a - x)
--R +
--R      +-----+
--R      3 2 | 2 2      4 2 2
--R      (- 2x - a x)\|x + a + 2x + 2a x
--R /
--R      +-----+
--R      | 2 2      2 2
--R      4x\|x + a - 4x - 2a
```

Type: Union(Expression Integer,...)

```
--S 9
bb:=(x*sqrt(x^2+a^2))/2-a^2/2*log(x+sqrt(x^2+a^2))
```

```
--R
--R      +-----+      +-----+
--R      2 | 2 2      | 2 2
--R      - a log(\|x + a + x) + x\|x + a
--R (2) -----
--R      2
```

Type: Expression Integer

```
--S 10
cc:=aa-bb
```

```
--R
--R      +-----+      +-----+
--R      2 | 2 2      2 | 2 2
--R      a log(\|x + a + x) + a log(\|x + a - x)
--R (3) -----
```


5 [1]:14.186 $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+a^2}}$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+a^2}} = -\frac{1}{a} \ln\left(\frac{a+\sqrt{x^2+a^2}}{x}\right)$$

```

(*)+=
)clear all

--S 16
aa:=integrate(1/(x*sqrt(x^2+a^2)),x)
--R
--R
--R          +-----+          +-----+
--R          | 2    2          | 2    2
--R      - log(\|x + a  - x + a) + log(\|x + a  - x - a)
--R (1) -----
--R                                  a
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E

--S 17
bb:=-1/a*log((a+sqrt(x^2+a^2))/x)
--R
--R
--R          +-----+
--R          | 2    2
--R          \|x + a  + a
--R      log(-----)
--R              x
--R (2) - -----
--R              a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

--S 18
cc:=aa-bb
--R
--R (3)
--R
--R          +-----+          +-----+          +-----+
--R          | 2    2          | 2    2          | 2    2
--R      - log(\|x + a  - x + a) + log(\|x + a  - x - a) + log(-----)
--R                                                              x
--R -----
--R                                  a

```

```
--R                                                    Type: Expression Integer
--E
```

```
--S 19
dd:=expandLog cc
```

```
--R
--R (4)
--R          +-----+          +-----+          +-----+
--R          | 2    2          | 2    2          | 2    2
--R      log(\|x  + a  + a) - log(\|x  + a  - x + a) + log(\|x  + a  - x - a)
--R      +
--R      - log(x)
--R      /
--R      a
--R                                                    Type: Expression Integer
--E
```

```
--S 20      14:186 Schaums and Axiom differ by a constant
ee:=complexNormalize dd
```

```
--R
--R      log(- 1)
--R (5)  - -----
--R      a
--R                                                    Type: Expression Integer
--E
```

6 [1]:14.187 $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+a^2}}$

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+a^2}} = -\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a^2x}$$

```
(*)+≡
)clear all
```

```
--S 21
aa:=integrate(1/(x^2*sqrt(x^2+a^2)),x)
```

```
--R
--R
--R          1
--R (1)  - ----
--R      +-----+
--R      | 2    2    2
--R      x\|x  + a  - x
```

Type: Union(Expression Integer,...)

```
--E
```

```
--S 22
bb:=-sqrt(x^2+a^2)/(a^2*x)
```

```
--R
--R      +-----+
--R      | 2    2
--R      \|x  + a
--R (2)  - ----
--R      2
--R      a x
```

Type: Expression Integer

```
--E
```

```
--S 23      14:187 Schaums and Axiom differ by a constant
```

```
cc:=aa-bb
```

```
--R
--R      1
--R (3)  - --
--R      2
--R      a
```

Type: Expression Integer

```
--E
```

7 [1]:14.188 $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2+a^2}}$

$$\int \frac{1}{x^3\sqrt{x^2+a^2}} = -\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{2a^2x^2} + \frac{1}{2a^3} \ln\left(\frac{a+\sqrt{x^2+a^2}}{x}\right)$$

```

(*)+=
)clear all

--S 24
aa:=integrate(1/(x^3*sqrt(x^2+a^2)),x)
--R
--R
--R (1)
--R      +-----+
--R      3 | 2  2      4  2 2      | 2  2
--R      (2x \|x + a - 2x - a x )log(\|x + a - x + a)
--R      +
--R      +-----+
--R      3 | 2  2      4  2 2      | 2  2
--R      (- 2x \|x + a + 2x + a x )log(\|x + a - x - a)
--R      +
--R      +-----+
--R      2  3 | 2  2      3  3
--R      (2a x + a )\|x + a - 2a x - 2a x
--R      /
--R      +-----+
--R      3 3 | 2  2      3 4  5 2
--R      4a x \|x + a - 4a x - 2a x
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E

--S 25
bb:=-sqrt(x^2+a^2)/(2*a^2*x^2)+1/(2*a^3)*log((a+sqrt(x^2+a^2))/x)
--R
--R
--R      +-----+
--R      | 2  2      +-----+
--R      2  \|x + a + a      | 2  2
--R      x log(-----) - a\|x + a
--R      x
--R (2) -----
--R      3 2
--R      2a x
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 26
cc:=aa-bb
--R
--R (3)
--R
--R          +-----+
--R          | 2    2
--R          +-----+
--R          | 2    2
--R          +-----+
--R          | 2    2
--R          \x + a  + a
--R log(\x + a  - x + a) - log(\x + a  - x - a) - log(-----)
--R
--R
--R          -----
--R
--R          3
--R          2a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 27
dd:=expandLog cc
--R
--R (4)
--R
--R          +-----+
--R          | 2    2
--R          +-----+
--R          | 2    2
--R          +-----+
--R          | 2    2
--R          - log(\x + a  + a) + log(\x + a  - x + a) - log(\x + a  - x - a)
--R
--R          +
--R          log(x)
--R
--R          /
--R
--R          3
--R          2a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 28      14:188 Schaums and Axiom differ by a constant
ee:=complexNormalize dd
--R
--R          log(- 1)
--R (5) -----
--R          3
--R          2a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

8 [1]:14.189 $\int \sqrt{x^2 + a^2} dx$

$$\int \sqrt{x^2 + a^2} = \frac{x\sqrt{x^2 + a^2}}{2} + \frac{a^2}{2} \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2})$$

```

(*)+=
)clear all

--S 29
aa:=integrate(sqrt(x^2+a^2),x)
--R
--R
--R (1)
--R          +-----+
--R          2 | 2  2      2 2  4      | 2  2
--R      (- 2a x\|x  + a  + 2a x  + a )log(\|x  + a  - x)
--R  +
--R          +-----+
--R          3  2 | 2  2      4  2 2
--R      (- 2x  - a x)\|x  + a  + 2x  + 2a x
--R  /
--R          +-----+
--R          | 2  2      2  2
--R      4x\|x  + a  - 4x  - 2a
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E

--S 30
bb:=(x*sqrt(x^2+a^2))/2+a^2/2*log(x+sqrt(x^2+a^2))
--R
--R          +-----+
--R          2 | 2  2      | 2  2
--R      a log(\|x  + a  + x) + x\|x  + a
--R (2) -----
--R          2
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

--S 31
cc:=aa-bb
--R
--R          +-----+
--R          2 | 2  2      2 | 2  2
--R      - a log(\|x  + a  + x) - a log(\|x  + a  - x)
--R (3) -----
--R          2

```

--R
--R Type: Expression Integer
--E

--S 32 14:189 Schaums and Axiom differ by a constant
dd:=complexNormalize cc

--R
--R
--R
$$(4) \quad - \frac{a^2 \log(a)^2}{2}$$

--R
--R Type: Expression Integer
--E

10 [1]:14.191 $\int x^2 \sqrt{x^2 + a^2} dx$

$$\int x^2 \sqrt{x^2 + a^2} = \frac{x(x^2 + a^2)^{3/2}}{4} - \frac{a^2 x \sqrt{x^2 + a^2}}{8} - \frac{a^4}{8} \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2})$$

```

(*)+=
)clear all

--S 36
aa:=integrate(x^2*sqrt(x^2+a^2),x)
--R
--R
--R (1)
--R          +-----+
--R      4 3      6 | 2  2      4 4      6 2      8      | 2  2
--R      ((8a x  + 4a x)\|x  + a  - 8a x  - 8a x  - a )log(\|x  + a  - x)
--R  +
--R          +-----+
--R      7      2 5      4 3      6 | 2  2      8      2 6      4 4      6 2
--R      (- 16x  - 24a x  - 10a x  - a x)\|x  + a  + 16x  + 32a x  + 20a x  + 4a x
--R  /
--R          +-----+
--R      3      2 | 2  2      4      2 2      4
--R      (64x  + 32a x)\|x  + a  - 64x  - 64a x  - 8a
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E

--S 37
bb:=(x*(x^2+a^2)^(3/2))/4-(a^2*x*sqrt(x^2+a^2))/8-a^4/8*log(x+sqrt(x^2+a^2))
--R
--R          +-----+
--R      4      | 2  2      3      2 | 2  2
--R      - a log(\|x  + a  + x) + (2x  + a x)\|x  + a
--R (2) -----
--R                                          8
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

--S 38
cc:=aa-bb
--R
--R          +-----+
--R      4      | 2  2      4      | 2  2
--R      a log(\|x  + a  + x) + a log(\|x  + a  - x)
--R (3) -----
--R                                          8

```

--R
--R Type: Expression Integer
--E

--S 39 14:191 Schaums and Axiom differ by a constant
dd:=complexNormalize cc

--R
--R
$$(4) \frac{a^4 \log(a)^2}{8}$$

--R
--R Type: Expression Integer
--E

11 [1]:14.192 $\int x^3 \sqrt{x^2 + a^2} dx$

$$\int x^3 \sqrt{x^2 + a^2} = \frac{(x^2 + a^2)^{5/2}}{5} - \frac{a^2(x^2 + a^2)^{3/2}}{3}$$

```

(*)+=
)clear all

--S 40
aa:=integrate(x^3*sqrt(x^2+a^2),x)
--R
--R
--R (1)
--R
--R          +-----+
--R      9      2 7      4 5      6 3      8      | 2      2      10      2 8
--R      (- 48x  - 76a x  - 3a x  + 35a x  + 10a x)\|x  + a  + 48x  + 100a x
--R      +
--R      4 6      6 4      8 2      10
--R      35a x  - 40a x  - 25a x  - 2a
--R      /
--R          +-----+
--R      4      2 2      4      | 2      2      5      2 3      4
--R      (240x  + 180a x  + 15a )\|x  + a  - 240x  - 300a x  - 75a x
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E

--S 41
bb:=(x^2+a^2)^(5/2)/5-(a^2*(x^2+a^2)^(3/2))/3
--R
--R
--R          +-----+
--R      4      2 2      4      | 2      2
--R      (3x  + a x  - 2a )\|x  + a
--R (2) -----
--R                                  15
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

--S 42      14:192 Schaums and Axiom agree
cc:=aa-bb
--R
--R (3)  0
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

12 [1]:14.193 $\int \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{x} dx$

$$\int \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{x} = \sqrt{x^2 + a^2} - a \ln \left(\frac{a + \sqrt{x^2 + a^2}}{x} \right)$$

```

(*)+=
)clear all

--S 43
aa:=integrate(sqrt(x^2+a^2)/x,x)
--R
--R
--R (1)
--R      +-----+      +-----+
--R      | 2  2      | 2  2
--R      (- a\|x  + a  + a x)log(\|x  + a  - x + a)
--R      +
--R      +-----+      +-----+      +-----+
--R      | 2  2      | 2  2      | 2  2      2  2
--R      (a\|x  + a  - a x)log(\|x  + a  - x - a) - x\|x  + a  + x  + a
--R      /
--R      +-----+
--R      | 2  2
--R      \|x  + a  - x
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E

--S 44
bb:=sqrt(x^2+a^2)-a*log((a+sqrt(x^2+a^2))/x)
--R
--R
--R      +-----+
--R      | 2  2      +-----+
--R      \|x  + a  + a  | 2  2
--R (2) - a log(-----) + \|x  + a
--R              x
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

--S 45
cc:=aa-bb
--R
--R (3)
--R      +-----+      +-----+
--R      | 2  2      | 2  2

```

```

--R      - a log(\|x  + a  - x + a) + a log(\|x  + a  - x - a)
--R  +
--R      +-----+
--R      | 2    2
--R      \|x  + a  + a
--R  a log(-----)
--R      x
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 46
dd:=expandLog cc
--R
--R  (4)
--R      +-----+                +-----+
--R      | 2    2                | 2    2
--R  a log(\|x  + a  + a) - a log(\|x  + a  - x + a)
--R  +
--R      +-----+
--R      | 2    2
--R  a log(\|x  + a  - x - a) - a log(x)
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 47      14:193 Schaums and Axiom differ by a constant
ee:=complexNormalize dd
--R
--R  (5)  - a log(- 1)
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

13 [1]:14.194 $\int \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{x^2} dx$

$$\int \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{x^2} = -\frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{x} + \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2})$$

```
(*)+=
)clear all
```

```
--S 48
```

```
aa:=integrate(sqrt(x^2+a^2)/x^2,x)
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R      +-----+      +-----+
--R      | 2  2      2      | 2  2      2
--R      (- x\|x  + a  + x )log(\|x  + a  - x) - a
--R (1) -----
--R      +-----+
--R      | 2  2      2
--R      x\|x  + a  - x
```

```
Type: Union(Expression Integer,...)
```

```
--E
```

```
--S 49
```

```
bb:=-sqrt(x^2+a^2)/x+log(x+sqrt(x^2+a^2))
```

```
--R
```

```
--R      +-----+      +-----+
--R      | 2  2      2      | 2  2
--R      x log(\|x  + a  + x) - \|x  + a
--R (2) -----
--R      x
```

```
Type: Expression Integer
```

```
--E
```

```
--S 50
```

```
cc:=aa-bb
```

```
--R
```

```
--R      +-----+      +-----+
--R      | 2  2      2      | 2  2
--R (3) - log(\|x  + a  + x) - log(\|x  + a  - x) - 1
```

```
Type: Expression Integer
```

```
--E
```

```
--S 51 14:194 Schaums and Axiom differ by a constant
```

```
dd:=complexNormalize cc
```

```
--R
```

```
--R      2
--R (4) - log(a ) - 1
--R
--E
```

Type: Expression Integer

14 [1]:14.195 $\int \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{x^3} dx$

$$\int \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{x^3} = -\frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{2x^2} - \frac{1}{2a} \ln\left(\frac{a + \sqrt{x^2 + a^2}}{x}\right)$$

```

(*)+=
)clear all

--S 52
aa:=integrate(sqrt(x^2+a^2)/x^3,x)
--R
--R
--R (1)
--R          +-----+
--R          3 | 2  2      4  2 2      | 2  2
--R          (- 2x \|x  + a  + 2x  + a x )log(\|x  + a  - x + a)
--R      +
--R          +-----+
--R          3 | 2  2      4  2 2      | 2  2
--R          (2x \|x  + a  - 2x  - a x )log(\|x  + a  - x - a)
--R      +
--R          +-----+
--R          2  3 | 2  2      3  3
--R          (2a x  + a )\|x  + a  - 2a x  - 2a x
--R      /
--R          +-----+
--R          3 | 2  2      4  3 2
--R          4a x \|x  + a  - 4a x  - 2a x
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E

--S 53
bb:=-sqrt(x^2+a^2)/(2*x^2)-1/(2*a)*log((a+sqrt(x^2+a^2))/x)
--R
--R
--R          +-----+
--R          | 2  2      +-----+
--R          2  \|x  + a  + a  | 2  2
--R          - x log(-----) - a\|x  + a
--R                      x
--R (2) -----
--R                      2
--R                    2a x
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 54
cc:=aa-bb
--R
--R (3)
--R
--R          +-----+
--R          | 2 2
--R - log(\|x + a - x + a) + log(\|x + a - x - a) + log(-----)
--R
--R          +-----+
--R          | 2 2
--R
--R          +-----+
--R          | 2 2
--R          \|x + a + a
--R
--R          -----
--R          x
--R
-----
--R
--R          2a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 55
dd:=expandLog cc
--R
--R (4)
--R
--R          +-----+
--R          | 2 2
--R          log(\|x + a + a) - log(\|x + a - x + a) + log(\|x + a - x - a)
--R
--R          +
--R          - log(x)
--R
--R          /
--R          2a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 56      14:195 Schaums and Axiom differ by a constant
ee:=complexNormalize dd
--R
--R          log(- 1)
--R (5)  - -----
--R          2a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

15 [1]:14.196 $\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}}$

$$\int \frac{1}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2 \sqrt{x^2 + a^2}}$$

```
(*)+≡
)clear all
```

```
--S 57
aa:=integrate(1/(x^2+a^2)^(3/2),x)
```

```
--R
--R
--R
--R (1) - -----
--R          +-----+
--R          | 2    2    2    2
--R          x\|x  + a  - x  - a
```

Type: Union(Expression Integer,...)

```
--E
```

```
--S 58
bb:=x/(a^2*sqrt(x^2+a^2))
```

```
--R
--R
--R          x
--R (2) -----
--R          +-----+
--R          2 | 2    2
--R          a \|x  + a
```

Type: Expression Integer

```
--E
```

```
--S 59 14:196 Schaums and Axiom differ by a constant
```

```
cc:=aa-bb
```

```
--R
--R
--R          1
--R (3) --
--R          2
--R          a
```

Type: Expression Integer

```
--E
```

16 [1]:14.197 $\int \frac{x dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}}$

$$\int \frac{x}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{-1}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

```
(*)+=
)clear all
```

```
--S 60
aa:=integrate(x/(x^2+a^2)^(3/2),x)
```

```
--R
--R
--R          +-----+
--R          | 2    2
--R          \|x  + a  - x
--R (1)  -----
--R          +-----+
--R          | 2    2    2    2
--R          x\|x  + a  - x  - a
```

Type: Union(Expression Integer,...)

```
--S 61
bb:=-1/sqrt(x^2+a^2)
```

```
--R
--R          1
--R (2)  - ----
--R          +-----+
--R          | 2    2
--R          \|x  + a
```

Type: Expression Integer

```
--S 62      14:197 Schaums and Axiom agree
```

```
cc:=aa-bb
```

```
--R
--R (3)  0
```

Type: Expression Integer

```
--E
```

17 [1]:14.198 $\int \frac{x^2 dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}}$

$$\int \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{-x}{\sqrt{x^2 + a^2}} + \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2})$$

(*)+=
)clear all

--S 63

aa:=integrate(x^2/(x^2+a^2)^(3/2),x)

--R

--R

$$\frac{(-x\sqrt{x^2 + a^2} + x^2 + a^2)\log(\sqrt{x^2 + a^2} - x) + a^2}{x\sqrt{x^2 + a^2} - x^2 - a^2}$$

(1)

--R

--R

--R

--R

--E

Type: Union(Expression Integer,...)

--S 64

bb:=-x/sqrt(x^2+a^2)+log(x+sqrt(x^2+a^2))

--R

--R

$$\frac{\sqrt{x^2 + a^2} \log(\sqrt{x^2 + a^2} + x) - x}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

(2)

--R

--R

--R

--R

--E

Type: Expression Integer

--S 65

cc:=aa-bb

--R

--R

$$-\log(\sqrt{x^2 + a^2} + x) - \log(\sqrt{x^2 + a^2} - x) - 1$$

(3)

--R

--E

Type: Expression Integer

--S 66 14:198 Schaums and Axiom differ by a constant

```
dd:=complexNormalize cc
--R
--R      2
--R (4)  - log(a ) - 1
--R
--E
```

Type: Expression Integer

19 [1]:14.200 $\int \frac{dx}{x(x^2 + a^2)^{3/2}}$

$$\int \frac{1}{x(x^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{1}{a^2\sqrt{x^2 + a^2}} - \frac{1}{a^3} \ln \left(\frac{a + \sqrt{x^2 + a^2}}{x} \right)$$

```

(*)+=
)clear all

--S 70
aa:=integrate(1/(x*(x^2+a^2)^(3/2)),x)
--R
--R
--R (1)
--R      +-----+      +-----+
--R      | 2  2      2  2      | 2  2
--R      (- x\|x + a  + x + a )log(\|x + a  - x + a)
--R      +
--R      +-----+      +-----+      +-----+
--R      | 2  2      2  2      | 2  2      | 2  2
--R      (x\|x + a  - x - a )log(\|x + a  - x - a) - a\|x + a  + a x
--R      /
--R      +-----+
--R      3 | 2  2      3 2  5
--R      a x\|x + a  - a x - a
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E

--S 71
bb:=1/(a^2*sqrt(x^2+a^2))-1/a^3*log((a+sqrt(x^2+a^2))/x)
--R
--R
--R      +-----+
--R      +-----+      | 2  2
--R      | 2  2      \|x + a  + a
--R      - \|x + a  log(-----) + a
--R                                  x
--R (2) -----
--R      +-----+
--R      3 | 2  2
--R      a \|x + a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

--S 72
cc:=aa-bb

```

```

--R
--R (3)
--R
--R          +-----+
--R          | 2  2
--R - log(\|x  + a  - x + a) + log(\|x  + a  - x - a) + log(-----)
--R
--R          +-----+
--R          | 2  2
--R
--R          +-----+
--R          | 2  2
--R          \|x  + a  + a
--R
--R          x
--R
-----
--R
--R          3
--R          a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 73
dd:=expandLog cc
--R
--R (4)
--R
--R          +-----+
--R          | 2  2
--R          log(\|x  + a  + a) - log(\|x  + a  - x + a) + log(\|x  + a  - x - a)
--R
--R          +
--R          - log(x)
--R
--R          /
--R          3
--R          a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 74      14:200 Schaums and Axiom differ by a constant
ee:=complexNormalize dd
--R
--R          log(- 1)
--R (5)  - -----
--R          3
--R          a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

20 [1]:14.201 $\int \frac{dx}{x^2(x^2 + a^2)^{3/2}}$

$$\int \frac{1}{x^2(x^2 + a^2)^{3/2}} = -\frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{a^4 x} - \frac{x}{a^4 \sqrt{x^2 + a^2}}$$

```
(*)+≡
)clear all
```

```
--S 75
aa:=integrate(1/(x^2*(x^2+a^2)^(3/2)),x)
```

```
--R
--R
--R
--R (1) - -----
--R              +-----+
--R          3      2 | 2      2      4      2 2
--R      (2x  + a x)\|x  + a  - 2x  - 2a x
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E
```

```
--S 76
bb:=-sqrt(x^2+a^2)/(a^4*x)-x/(a^4*sqrt(x^2+a^2))
```

```
--R
--R
--R          2      2
--R      - 2x  - a
--R (2) -----
--R      +-----+
--R      4 | 2      2
--R      a x \|x  + a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E
```

```
--S 77      14:201 Schaums and Axiom differ by a constant
cc:=aa-bb
```

```
--R
--R
--R (3) - --
--R      4
--R      a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E
```

21 [1]:14.202 $\int \frac{dx}{x^3(x^2 + a^2)^{3/2}}$

$$\int \frac{1}{x^3(x^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{-1}{2a^2x^2\sqrt{x^2 + a^2}} - \frac{3}{2a^4\sqrt{x^2 + a^2}} + \frac{3}{2a^5} \ln\left(\frac{a + \sqrt{x^2 + a^2}}{x}\right)$$

```
<*)+=
)clear all
```

```
--S 78
aa:=integrate(1/(x^3*(x^2+a^2)^(3/2)),x)
```

```
--R
--R
--R (1)
--R
--R          +-----+
--R      5      2 3 | 2      2      6      2 4      4 2      | 2      2
--R      ((12x  + 9a x )\|x  + a  - 12x  - 15a x  - 3a x )log(\|x  + a  - x + a)
--R
--R      +
--R          +-----+
--R      5      2 3 | 2      2      6      2 4      4 2
--R      ((- 12x  - 9a x )\|x  + a  + 12x  + 15a x  + 3a x )
--R
--R      *
--R          +-----+
--R          | 2      2
--R      log(\|x  + a  - x - a)
--R
--R      +
--R          +-----+
--R      4      3 2      5 | 2      2      5      3 3      5
--R      (12a x  + 7a x  + a )\|x  + a  - 12a x  - 13a x  - 3a x
--R
--R      /
--R          +-----+
--R      5 5      7 3 | 2      2      5 6      7 4      9 2
--R      (8a x  + 6a x )\|x  + a  - 8a x  - 10a x  - 2a x
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E
```

```
--S 79
bb:=-1/(2*a^2*x^2*sqrt(x^2+a^2))-3/(2*a^4*sqrt(x^2+a^2))+3/(2*a^5)*log((a+sqrt(x^2+a^2)
```

```
--R
--R
--R          +-----+
--R          +-----+ | 2      2
--R      2 | 2      2 \|x  + a  + a      2      3
--R      3x \|x  + a  log(-----) - 3a x  - a
--R                                  x
--R (2) -----
```

```

--R
--R          +-----+
--R      5 2 | 2  2
--R      2a x \|x  + a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 80
cc:=aa-bb
--R
--R (3)
--R
--R          +-----+          +-----+          +-----+
--R          | 2  2          | 2  2          | 2  2
--R      3log(\|x  + a  - x + a) - 3log(\|x  + a  - x - a) - 3log(-----)
--R
--R                                          \|x  + a  + a
--R                                          x
--R
-----
--R
--R          5
--R          2a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 81
dd:=expandLog cc
--R
--R (4)
--R
--R          +-----+          +-----+
--R          | 2  2          | 2  2
--R      - 3log(\|x  + a  + a) + 3log(\|x  + a  - x + a)
--R
--R      +
--R
--R          +-----+
--R          | 2  2
--R      - 3log(\|x  + a  - x - a) + 3log(x)
--R
--R      /
--R
--R      5
--R      2a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 82      14:202 Schaums and Axiom differ by a constant
ee:=complexNormalize dd
--R
--R      3log(- 1)
--R (5) -----
--R          5
--R          2a
--R
--R                                          Type: Expression Integer

```

--E

22 [1]:14.203 $\int (x^2 + a^2)^{3/2} dx$

$$\int (x^2 + a^2)^{3/2} = \frac{x(x^2 + a^2)^{3/2}}{4} + \frac{3a^2x\sqrt{x^2 + a^2}}{8} + \frac{3}{8}a^4 \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2})$$

```

(*)+≡
)clear all

--S 83
aa:=integrate((x^2+a^2)^(3/2),x)
--R
--R (1)
--R
--R          +-----+
--R      4 3      6 | 2 2      4 4      6 2      8      | 2 2
--R      ((- 24a x - 12a x)\|x + a + 24a x + 24a x + 3a )log(\|x + a - x)
--R
--R      +
--R
--R          +-----+
--R      7      2 5      4 3      6 | 2 2      8      2 6      4 4
--R      (- 16x - 56a x - 42a x - 5a x)\|x + a + 16x + 64a x + 68a x
--R
--R      +
--R      6 2
--R      20a x
--R
--R      /
--R
--R          +-----+
--R      3      2 | 2 2      4      2 2      4
--R      (64x + 32a x)\|x + a - 64x - 64a x - 8a
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E

```

```

--S 84
bb:=(x*(x^2+a^2)^(3/2))/4+(3*a^2*x*sqrt(x^2+a^2))/8+3/8*a^4*log(x+sqrt(x^2+a^2))
--R
--R
--R          +-----+
--R      4      | 2 2      3      2 | 2 2
--R      3a log(\|x + a + x) + (2x + 5a x)\|x + a
--R (2) -----
--R
--R                                          8
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 85
cc:=aa-bb
--R
--R
--R          +-----+
--R      4      | 2 2      4      | 2 2
--R      - 3a log(\|x + a + x) - 3a log(\|x + a - x)

```

```

--R (3) -----
--R                                     8
--R                                     Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 86      14:203 Schaums and Axiom differ by a constant
dd:=complexNormalize cc

```

```

--R
--R          4      2
--R      3a log(a )
--R (4)  - -----
--R          8
--R
--R                                     Type: Expression Integer
--E

```

23 [1]:14.204 $\int x(x^2 + a^2)^{3/2} dx$

$$\int x(x^2 + a^2)^{3/2} = \frac{(x^2 + a^2)^{5/2}}{5}$$

```

(*)+=
)clear all

--S 87
aa:=integrate(x*(x^2+a^2)^(3/2),x)
--R
--R
--R (1)
--R
--R          +-----+
--R      9      2 7      4 5      6 3      8 | 2      2      10      2 8
--R      (- 16x  - 52a x  - 61a x  - 30a x  - 5a x)\|x  + a  + 16x  + 60a x
--R      +
--R      4 6      6 4      8 2      10
--R      85a x  + 55a x  + 15a x  + a
--R      /
--R          +-----+
--R      4      2 2      4 | 2      2      5      2 3      4
--R      (80x  + 60a x  + 5a )\|x  + a  - 80x  - 100a x  - 25a x
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E

--S 88
bb:=(x^2+a^2)^(5/2)/5
--R
--R          +-----+
--R      4      2 2      4 | 2      2
--R      (x  + 2a x  + a )\|x  + a
--R (2) -----
--R                                  5
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

--S 89      14:204 Schaums and Axiom agree
cc:=aa-bb
--R
--R (3)  0
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```


--E

--S 92

cc:=aa-bb

--R

--R

$$\frac{a^6 \log(\sqrt{x^2 + a^2} + x) + a^6 \log(\sqrt{x^2 + a^2} - x)}{16}$$

--R (3)

--R

--R

--E

Type: Expression Integer

--S 93 14:205 Schaums and Axiom differ by a constant

dd:=complexNormalize cc

--R

--R

$$a^6 \log(a)$$

$$(4) \frac{a^6 \log(a)}{16}$$

--R

--R

--E

Type: Expression Integer

25 [1]:14.206 $\int x^3(x^2 + a^2)^{3/2} dx$

$$\int x^3(x^2 + a^2)^{3/2} = \frac{(x^2 + a^2)^{7/2}}{7} - \frac{a^2(x^2 + a^2)^{5/2}}{5}$$

```

(*)+≡
)clear all

--S 94
aa:=integrate(x^3*(x^2+a^2)^(3/2),x)
--R
--R
--R (1)
--R      13      2 11      4 9      6 7      8 5      10 3
--R      - 320x  - 1072a x  - 1240a x  - 467a x  + 112a x  + 105a x
--R      +
--R      12
--R      14a x
--R      *
--R      +-----+
--R      | 2  2
--R      \|x  + a
--R      +
--R      14      2 12      4 10      6 8      8 6      10 4      12 2
--R      320x  + 1232a x  + 1736a x  + 973a x  + 21a x  - 175a x  - 49a x
--R      +
--R      14
--R      - 2a
--R      /
--R      +-----+
--R      6      2 4      4 2      6 | 2  2      7      2 5
--R      (2240x  + 2800a x  + 840a x  + 35a )\|x  + a  - 2240x  - 3920a x
--R      +
--R      4 3      6
--R      - 1960a x  - 245a x
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E

```

```

--S 95
bb:=(x^2+a^2)^(7/2)/7-(a^2*(x^2+a^2)^(5/2))/5
--R
--R
--R      +-----+
--R      6      2 4      4 2      6 | 2  2
--R      (5x  + 8a x  + a x  - 2a )\|x  + a
--R (2) -----
--R                                  35

```

```
--R                                         Type: Expression Integer
--E

--S 96      14:206 Schaums and Axiom agree
cc:=aa-bb
--R
--R      (3)  0
--R                                         Type: Expression Integer
--E
```

26 [1]:14.207 $\int \frac{(x^2 + a^2)^{3/2}}{x} dx$

$$\int \frac{(x^2 + a^2)^{3/2}}{x} = \frac{(x^2 + a^2)^{3/2}}{3} + a^2 \sqrt{x^2 + a^2} - a^3 \ln \left(\frac{a + \sqrt{x^2 + a^2}}{x} \right)$$

```

(*)+=
)clear all

--S 97
aa:=integrate((x^2+a^2)^(3/2)/x,x)
--R
--R
--R (1)
--R
--R          +-----+
--R          3 2    5 | 2    2    3 3    5    | 2    2
--R          ((- 12a x - 3a )\|x + a  + 12a x + 9a x)log(\|x + a  - x + a)
--R
--R          +
--R          +-----+
--R          3 2    5 | 2    2    3 3    5    | 2    2
--R          ((12a x + 3a )\|x + a  - 12a x - 9a x)log(\|x + a  - x - a)
--R
--R          +
--R          +-----+
--R          5      2 3    4 | 2    2    6      2 4    4 2    6
--R          (- 4x  - 19a x - 12a x)\|x + a  + 4x  + 21a x + 21a x + 4a
--R
--R          /
--R          +-----+
--R          2      2 | 2    2    3      2
--R          (12x  + 3a )\|x + a  - 12x  - 9a x
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E

--S 98
bb:=(x^2+a^2)^(3/2)/3+a^2*sqrt(x^2+a^2)-a^3*log((a+sqrt(x^2+a^2))/x)
--R
--R
--R          +-----+
--R          | 2    2
--R          3 \|x + a  + a      2      2 | 2    2
--R          - 3a log(-----) + (x + 4a )\|x + a
--R                      x
--R (2) -----
--R                                  3
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 99
cc:=aa-bb
--R
--R (3)
--R          +-----+
--R      3    | 2    2          3    | 2    2
--R    - a log(\|x  + a  - x + a) + a log(\|x  + a  - x - a)
--R  +
--R          +-----+
--R          | 2    2
--R      3    \|x  + a  + a
--R    a log(-----)
--R                x
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 100
dd:=expandLog cc
--R
--R (4)
--R          +-----+
--R      3    | 2    2          3    | 2    2
--R    a log(\|x  + a  + a) - a log(\|x  + a  - x + a)
--R  +
--R          +-----+
--R      3    | 2    2          3
--R    a log(\|x  + a  - x - a) - a log(x)
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 101 14:207 Schaums and Axiom differ by a constant
ee:=complexNormalize dd
--R
--R      3
--R (5) - a log(- 1)
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

27 [1]:14.208 $\int \frac{(x^2 + a^2)^{3/2}}{x^2} dx$

$$\int \frac{(x^2 + a^2)^{3/2}}{x^2} = -\frac{(x^2 + a^2)^{3/2}}{x} + \frac{3x\sqrt{x^2 + a^2}}{2} + \frac{3}{2}a^2 \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2})$$

```

(*)+=
)clear all

--S 102
aa:=integrate((x^2+a^2)^(3/2)/x^2,x)
--R
--R
--R (1)
--R          +-----+
--R      2 3    4 | 2    2      2 4    4 2    | 2    2
--R      ((- 12a x - 3a x)\|x + a  + 12a x + 9a x )log(\|x + a  - x)
--R      +
--R          +-----+
--R      5      2 3    4 | 2    2      6      2 4    4 2    6
--R      (- 4x - 3a x + 4a x)\|x + a  + 4x + 5a x - 3a x - 2a
--R      /
--R          +-----+
--R      3      2 | 2    2      4      2 2
--R      (8x + 2a x)\|x + a  - 8x - 6a x
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E

--S 103
bb:=- (x^2+a^2)^(3/2)/x+(3*x*sqrt(x^2+a^2))/2+3/2*a^2*log(x+sqrt(x^2+a^2))
--R
--R          +-----+
--R      2      | 2    2      2      2 | 2    2
--R      3a x log(\|x + a  + x) + (x - 2a )\|x + a
--R (2) -----
--R                                          2x
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

--S 104
cc:=aa-bb
--R
--R          +-----+
--R      2      | 2    2      2      | 2    2      2
--R      - 3a log(\|x + a  + x) - 3a log(\|x + a  - x) - 2a
--R (3) -----

```

```
--R
--R
--R                                     2
--R                                     Type: Expression Integer
--E
```

```
--S 105      14:208 Schaums and Axiom differ by a constant
dd:=complexNormalize cc
```

```
--R
--R
--R          2      2      2
--R      - 3a log(a ) - 2a
--R (4)  -----
--R          2
--R
--R                                     Type: Expression Integer
--E
```

28 [1]:14.209 $\int \frac{(x^2 + a^2)^{3/2}}{x^3} dx$

$$\int \frac{(x^2 + a^2)^{3/2}}{x^3} = -\frac{(x^2 + a^2)^{3/2}}{2x^2} + \frac{3}{2}\sqrt{x^2 + a^2} - \frac{3}{2}a \ln\left(\frac{a + \sqrt{x^2 + a^2}}{x}\right)$$

```

(*)+=
)clear all

--S 106
aa:=integrate((x^2+a^2)^(3/2)/x^3,x)
--R
--R
--R (1)
--R
--R          +-----+
--R          4      3 2 | 2      2      5      3 3      | 2      2
--R          ((- 12a x  - 3a x )\|x  + a  + 12a x  + 9a x )log(\|x  + a  - x + a)
--R
--R          +
--R          +-----+
--R          4      3 2 | 2      2      5      3 3      | 2      2
--R          ((12a x  + 3a x )\|x  + a  - 12a x  - 9a x )log(\|x  + a  - x - a)
--R
--R          +
--R          +-----+
--R          5      2 3      4      | 2      2      6      2 4      4 2      6
--R          (- 8x  - 2a x  + 3a x)\|x  + a  + 8x  + 6a x  - 3a x  - a
--R
--R          /
--R          +-----+
--R          4      2 2 | 2      2      5      2 3
--R          (8x  + 2a x )\|x  + a  - 8x  - 6a x
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E

--S 107
bb:=- (x^2+a^2)^(3/2)/(2*x^2)+3/2*sqrt(x^2+a^2)-3/2*a*log((a+sqrt(x^2+a^2))/x)
--R
--R
--R          +-----+
--R          | 2      2
--R          2      \|x  + a  + a      2      2 | 2      2
--R          - 3a x log(-----) + (2x  - a )\|x  + a
--R
--R          x
--R (2) -----
--R
--R          2
--R          2x
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 108
cc:=aa-bb
--R
--R (3)
--R          +-----+          +-----+
--R          | 2    2          | 2    2
--R      - 3a log(\|x  + a  - x + a) + 3a log(\|x  + a  - x - a)
--R    +
--R          +-----+
--R          | 2    2
--R          \|x  + a  + a
--R      3a log(-----)
--R                    x
--R /
--R 2
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 109
dd:=expandLog cc
--R
--R (4)
--R          +-----+          +-----+
--R          | 2    2          | 2    2
--R      3a log(\|x  + a  + a) - 3a log(\|x  + a  - x + a)
--R    +
--R          +-----+
--R          | 2    2
--R      3a log(\|x  + a  - x - a) - 3a log(x)
--R /
--R 2
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 110    14:209 Schaums and Axiom differ by a constant
ee:=complexNormalize dd
--R
--R      3a log(- 1)
--R (5)  - -----
--R      2
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

)spool
)lisp (bye)

```

References

- [1] Spiegel, Murray R. *Mathematical Handbook of Formulas and Tables*
Schaum's Outline Series McGraw-Hill 1968 p67-68