

\$SPAD/input schaum10.input

Timothy Daly

June 15, 2008

## Contents

1	[1]:14.210	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$	3
2	[1]:14.xxx	$\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$	5
3	[1]:14.211	$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$	6
4	[1]:14.212	$\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$	8
5	[1]:14.213	$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - a^2}}$	9
6	[1]:14.214	$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2 - a^2}}$	13
7	[1]:14.215	$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2 - a^2}}$	14
8	[1]:14.216	$\int \sqrt{x^2 - a^2} dx$	18
9	[1]:14.217	$\int x\sqrt{x^2 - a^2} dx$	20
10	[1]:14.218	$\int x^2\sqrt{x^2 - a^2} dx$	21
11	[1]:14.219	$\int x^3\sqrt{x^2 - a^2} dx$	23
12	[1]:14.220	$\int \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x} dx$	24
13	[1]:14.221	$\int \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x^2} dx$	28
14	[1]:14.222	$\int \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x^3} dx$	30
15	[1]:14.223	$\int \frac{dx}{(x^2 - a^2)^{3/2}}$	34

16 [1]:14.224	$\int \frac{x dx}{(x^2 - a^2)^{3/2}}$	35
17 [1]:14.225	$\int \frac{x^2 dx}{(x^2 - a^2)^{3/2}}$	36
18 [1]:14.226	$\int \frac{x^3 dx}{(x^2 - a^2)^{3/2}}$	38
19 [1]:14.227	$\int \frac{dx}{x(x^2 - a^2)^{3/2}}$	39
20 [1]:14.228	$\int \frac{dx}{x^2(x^2 - a^2)^{3/2}}$	43
21 [1]:14.229	$\int \frac{dx}{x^3(x^2 - a^2)^{3/2}}$	44
22 [1]:14.230	$\int (x^2 - a^2)^{3/2} dx$	48
23 [1]:14.231	$\int x(x^2 - a^2)^{3/2} dx$	50
24 [1]:14.232	$\int x^2(x^2 - a^2)^{3/2} dx$	51
25 [1]:14.233	$\int x^3(x^2 - a^2)^{3/2} dx$	53
26 [1]:14.234	$\int \frac{(x^2 - a^2)^{3/2}}{x} dx$	55
27 [1]:14.235	$\int \frac{(x^2 - a^2)^{3/2}}{x^2} dx$	59
28 [1]:14.236	$\int \frac{(x^2 - a^2)^{3/2}}{x^3} dx$	61

1 [1]:14.210  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 - a^2})$$

```

(*)≡
)spool schaum10.output
)set message test on
)set message auto off
)clear all

--S 1
aa:=integrate(1/(sqrt(x^2-a^2)),x)
--R
--R
--R          +-----+
--R          | 2    2
--R (1)  - log(\|x  - a  - x)
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E

--S 2
bb:=log(x+sqrt(x^2-a^2))
--R
--R          +-----+
--R          | 2    2
--R (2)  log(\|x  - a  + x)
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

--S 3
cc:=aa-bb
--R
--R          +-----+          +-----+
--R          | 2    2          | 2    2
--R (3)  - log(\|x  - a  + x) - log(\|x  - a  - x)
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

--S 4
logmul1:=rule(c*log(a)+c*log(b) == c*log(a*b))
--R
--I (4)  c log(b) + c log(a) + %I == c log(a b) + %I
--R
--R                                          Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
--E

```

--S 5 14:210 Schaums and Axiom differ by a constant

dd:=logmul1 cc

--R

--R (5)  $-\log(-a^2)$

--R

Type: Expression Integer

--E

2 [1]:14.xxx  $\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \sqrt{x^2 - a^2}$$

```
(*)+≡
)clear all
```

```
--S 6
aa:=integrate(x/(sqrt(x^2-a^2)),x)
```

```
--R
--R
--R          +-----+
--R          | 2    2    2    2
--R      - x\|x  - a  + x  - a
--R (1)  -----
--R          +-----+
--R          | 2    2
--R          \|x  - a  - x
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E
```

```
--S 7
bb:=sqrt(x^2-a^2)
```

```
--R
--R          +-----+
--R          | 2    2
--R (2)  \|x  - a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E
```

```
--S 8      14:xxx Schaums and Axiom agree
```

```
cc:=aa-bb
```

```
--R
--R (3)  0
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E
```

**3 [1]:14.211**  $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{x\sqrt{x^2 - a^2}}{2} + \frac{a^2}{2} \ln(x + \sqrt{x^2 - a^2})$$

`<*>+≡  
)clear all`

`--S 9  
aa:=integrate(x^2/sqrt(x^2-a^2),x)`

`--R  
--R  
--R (1)  
--R +-----+ +-----+  
--R 2 | 2 2 2 2 4 | 2 2  
--R (- 2a x\|x - a + 2a x - a )log(\|x - a - x)  
--R +  
--R +-----+  
--R 3 2 | 2 2 4 2 2  
--R (- 2x + a x)\|x - a + 2x - 2a x  
--R /  
--R +-----+  
--R | 2 2 2 2  
--R 4x\|x - a - 4x + 2a`

Type: Union(Expression Integer,...)

`--S 10  
bb:=(x*sqrt(x^2-a^2))/2+a^2/2*log(x+sqrt(x^2-a^2))`

`--R  
--R +-----+ +-----+  
--R 2 | 2 2 | 2 2  
--R a log(\|x - a + x) + x\|x - a  
--R (2) -----  
--R 2`

Type: Expression Integer

`--S 11  
cc:=aa-bb`

`--R  
--R +-----+ +-----+  
--R 2 | 2 2 2 | 2 2  
--R - a log(\|x - a + x) - a log(\|x - a - x)  
--R (3) -----`

```
--R
--R
--R                                     2
--R                                     Type: Expression Integer
--E
```

```
--S 12      14:211 Schaums and Axiom differ by a constant
dd:=complexNormalize cc
```

```
--R
--R
--R          2      2
--R      a log(- a )
--R (4)  - -----
--R          2
--R
--R                                     Type: Expression Integer
--E
```



4 [1]:14.212  $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{(x^2 - a^2)^{3/2}}{3} + a^2 \sqrt{x^2 - a^2}$$

```

(*)+=
)clear all

--S 13
aa:=integrate(x^3/sqrt(x^2-a^2),x)
--R
--R
--R
--R
--R          +-----+
--R          5      2 3      4 | 2      2      6      2 4      4 2      6
--R      (- 4x  - 5a x  + 6a x)\|x  - a  + 4x  + 3a x  - 9a x  + 2a
--R  (1) -----
--R
--R          +-----+
--R          2      2 | 2      2      3      2
--R      (12x  - 3a )\|x  - a  - 12x  + 9a x
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E

--S 14
bb:=(x^2-a^2)^(3/2)/3+a^2*sqrt(x^2-a^2)
--R
--R
--R          +-----+
--R          2      2 | 2      2
--R      (x  + 2a )\|x  - a
--R  (2) -----
--R          3
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

--S 15      14:212 Schaums and Axiom agree
cc:=aa-bb
--R
--R  (3)  0
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

5 [1]:14.213  $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - a^2}}$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \sec^{-1} \left| \frac{x}{a} \right|$$

```
(*)+=
)clear all
```

```
--S 16
aa:=integrate(1/(x*sqrt(x^2-a^2)),x)
```

```
--R
--R
--R          +-----+
--R          | 2    2
--R          \|x  - a  - x
--R      2atan(-----)
--R              a
--R (1) -----
--R          a
```

Type: Union(Expression Integer,...)

```
--S 17
bb:=1/a*asec(x/a)
```

```
--R
--R          x
--R      asec(-)
--R          a
--R (2) -----
--R          a
```

Type: Expression Integer

```
--S 18
cc:=aa-bb
```

```
--R
--R          +-----+
--R          | 2    2
--R          \|x  - a  - x
--R      2atan(-----) - asec(-)
--R              a              a
--R (3) -----
--R          a
```

Type: Expression Integer

```

--S 19
asecrule:=rule(asec(x) == 1/2*%pi+%i*log(sqrt(1-1/x^2)+%i/x))
--R
--R
--R          +-----+
--R          | 2
--R          |x  - 1
--R          x |----- + %i
--R          | 2
--R          \| x
--R          2%i log(-----) + %pi
--R                      x
--R (4) asec(x) == -----
--R                      2
--R          Type: RewriteRule(Integer,Complex Integer,Expression Complex Integer)
--E

```

```

--S 20
dd:=asecrule cc
--R
--R
--R          +-----+
--R          | 2  2
--R          |x  - a
--R          x |----- + %i a
--R          | 2
--R          \| x
--R          - 2%i log(-----) + 4atan(-----) - %pi
--R                      x                      \|x  - a  - x
--R                      a
--R (5) -----
--R                      2a
--R          Type: Expression Complex Integer
--E

```

```

--S 21
atanrule:=rule(atan(x) == -%i/2*log((1+%i*x)/(1-%i*x)))
--R
--R
--R          - x + %i
--R          %i log(-----)
--R          x + %i
--R (6) atan(x) == - -----
--R                      2
--R          Type: RewriteRule(Integer,Complex Integer,Expression Complex Integer)
--E

```

```

--S 22
ee:=atanrule dd

```

```

--R
--R          +-----+
--R          | 2  2
--R          |x  - a
--R      x |-----+ + %i a
--R          | 2
--R          \|  x
--R      - 2%i log(-----) - 2%i log(-----) - %pi
--R                                     +-----+
--R                                     | 2  2
--R                                     - \|x  - a  + x + %i a
--R                                     +-----+
--R                                     | 2  2
--R                                     \|x  - a  - x + %i a
--R (7) -----
--R                                     2a
--R                                     Type: Expression Complex Integer
--E

```

```

--S 23
ff:=expandLog ee
--R
--R (8)
--R          +-----+
--R          | 2  2
--R      2%i log(\|x  - a  - x + %i a) - 2%i log(\|x  - a  - x - %i a)
--R +
--R          +-----+
--R          | 2  2
--R          |x  - a
--R      - 2%i log(x |-----+ + %i a) + 2%i log(x) - 2%i log(- 1) - %pi
--R          | 2
--R          \|  x
--R /
--R      2a
--R
--R                                     Type: Expression Complex Integer
--E

```

```

--S 24
gg:=rootSimp ff
--R
--R (9)
--R          +-----+
--R          | 2  2
--R      - 2%i log(\|x  - a  + %i a) + 2%i log(\|x  - a  - x + %i a)
--R +
--R          +-----+
--R          | 2  2
--R      - 2%i log(\|x  - a  - x - %i a) + 2%i log(x) - 2%i log(- 1) - %pi

```

```

--R /
--R      2a
--R
--R                                          Type: Expression Complex Integer
--E

--S 25      14:213 Schaums and Axiom differ by a constant
hh:=complexNormalize gg
--R
--R          %pi
--R      (10) - ----
--R          2a
--R
--R                                          Type: Expression Complex Integer
--E

```

6 [1]:14.214  $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-a^2}}$

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a^2x}$$

```
<*)+=
)clear all
```

```
--S 26
aa:=integrate(1/(x^2*sqrt(x^2-a^2)),x)
```

```
--R
--R
--R          1
--R (1)  -----
--R      +-----+
--R      | 2    2    2
--R      x\|x  - a  - x
```

Type: Union(Expression Integer,...)

```
--S 27
bb:=sqrt(x^2-a^2)/(a^2*x)
```

```
--R
--R      +-----+
--R      | 2    2
--R      \|x  - a
--R (2)  -----
--R      2
--R      a x
```

Type: Expression Integer

```
--S 28 14:214 Schaums and Axiom differ by a constant
```

```
cc:=aa-bb
```

```
--R
--R      1
--R (3)  --
--R      2
--R      a
```

Type: Expression Integer

7 [1]:14.215

$$\int \frac{dx}{x^3 \sqrt{x^2 - a^2}}$$

$$\int \frac{1}{x^3 \sqrt{x^2 - a^2}} = -\frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{2a^2 x^2} + \frac{1}{2a^3} \sec^{-1} \left| \frac{x}{a} \right|$$

(\*)+=  
)clear all

--S 29

aa:=integrate(1/(x^3\*sqrt(x^2-a^2)),x)

--R

--R

--R (1)

$$\frac{(4x^3 \sqrt{x^2 - a^2} - 4x^4 + 2a^2 x^2) \operatorname{atan}\left(\frac{\sqrt{x^2 - a^2} - x}{a}\right) + (-2a^2 x^3 + a^3) \sqrt{x^2 - a^2} + 2a^3 x^3 - 2a^3 x}{4a^3 x^3 \sqrt{x^2 - a^2} - 4a^3 x^4 + 2a^5 x^2}$$

--R

--R

--R

--R

--R /

--R

--R

--R

--R

--E

Type: Union(Expression Integer,...)

--S 30

bb:=sqrt(x^2-a^2)/(2\*a^2\*x^2)+1/(2\*a^3)\*asec(x/a)

--R

--R

--R

--R

--R

--R (2)

--R

--R

--R

--R

--E

Type: Expression Integer

--S 31

cc:=aa-bb

--R

```

--R
--R          +-----+
--R          | 2    2
--R          \|x  - a  - x      x
--R      2atan(-----) - asec(-)
--R              a              a
--R (3) -----
--R              3
--R             2a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 32
atanrule:=rule(atan(x) == -%i/2*log((1+%i*x)/(1-%i*x)))
--R
--R          - x + %i
--R      %i log(-----)
--R              x + %i
--R (4) atan(x) == - -----
--R                  2
--R
--R      Type: RewriteRule(Integer,Complex Integer,Expression Complex Integer)
--E

```

```

--S 33
dd:=atanrule cc
--R
--R          +-----+
--R          | 2    2
--R      - \|x  - a  + x + %i a      x
--R  - %i log(-----) - asec(-)
--R              +-----+
--R              | 2    2
--R              \|x  - a  - x + %i a
--R (5) -----
--R              3
--R             2a
--R
--R                                          Type: Expression Complex Integer
--E

```

```

--S 34
asecrule:=rule(asec(x) == 1/2*%pi+%i*log(sqrt(1-1/x^2)+%i/x))
--R
--R          +-----+
--R          | 2
--R          |x  - 1
--R      x |----- + %i

```



```

--R          |  2
--R         \| x
--R      2%i log(-----) + %pi
--R                    x
--R (6) asec(x) == -----
--R                    2
--R      Type: RewriteRule(Integer,Complex Integer,Expression Complex Integer)
--E

```

```

--S 35
ee:=asecrule dd

```

```

--R
--R          +-----+
--R          | 2  2
--R          |x  - a
--R      x |-----+ + %i a
--R          |  2
--R          \| x
--R      - 2%i log(-----) - 2%i log(-----) - %pi
--R                    x
--R                    +-----+
--R                    | 2  2
--R                    - \|x  - a  + x + %i a
--R                    +-----+
--R                    | 2  2
--R                    \|x  - a  - x + %i a
--R (7) -----
--R                    3
--R                   4a
--R      Type: Expression Complex Integer
--E

```

```

--S 36
ff:=expandLog ee

```

```

--R
--R (8)
--R          +-----+
--R          | 2  2
--R      2%i log(\|x  - a  - x + %i a) - 2%i log(\|x  - a  - x - %i a)
--R +
--R          +-----+
--R          | 2  2
--R          |x  - a
--R      - 2%i log(x |-----+ + %i a) + 2%i log(x) - 2%i log(- 1) - %pi
--R          |  2
--R          \| x
--R /
--R      3
--R     4a
--R
--R      Type: Expression Complex Integer

```

```

--E
--S 37
gg:=rootSimp ff
--R
--R (9)
--R          +-----+          +-----+
--R          | 2    2          | 2    2
--R      - 2%i log(\|x  - a  + %i a) + 2%i log(\|x  - a  - x + %i a)
--R      +
--R          +-----+
--R          | 2    2
--R      - 2%i log(\|x  - a  - x - %i a) + 2%i log(x) - 2%i log(- 1) - %pi
--R      /
--R      3
--R      4a
--R
--R                                          Type: Expression Complex Integer
--E

```

```

--S 38      14:215 Schaums and Axiom differ by a constant
hh:=complexNormalize gg
--R
--R      %pi
--R      (10) - ----
--R            3
--R           4a
--R
--R                                          Type: Expression Complex Integer
--E

```

8 [1]:14.216  $\int \sqrt{x^2 - a^2} dx$

$$\int \sqrt{x^2 - a^2} = \frac{x\sqrt{x^2 - a^2}}{2} - \frac{a^2}{2} \ln(x + \sqrt{x^2 - a^2})$$

`<*>+≡  
)clear all`

`--S 39`

`aa:=integrate(sqrt(x^2-a^2),x)`

`--R`

`--R`

`--R (1)`

$$\frac{(2ax\sqrt{x^2 - a^2} - 2a^2x + a^4)\log(\sqrt{x^2 - a^2} - x) + (-2x^3 + a^2x)\sqrt{x^2 - a^2} + 2x^4 - 2a^2x^2}{4x\sqrt{x^2 - a^2} - 4x^2 + 2a^2}$$

`--R /`

`--R`

`--R`

`--R`

`--R`

`--R`

`--E`

Type: Union(Expression Integer,...)

`--S 40`

`bb:=(x*sqrt(x^2-a^2))/2-a^2/2*log(x+sqrt(x^2-a^2))`

`--R`

`--R`

`--R`

`--R`

`--R`

`--R`

`--R`

`--R`

`--E`

Type: Expression Integer

`--S 41`

`cc:=aa-bb`

`--R`

`--R`

`--R`

`--R`

`--R`

`--R`

`--R`

`--R`

`--R`

`--R`

`--R`

`--R`

`--R`

`--R`

`--R`

`--R`

`--R`

`--R`

`--R`

`--R`

`--R`

`--R`

$$(3) \frac{a \log(\sqrt{x^2 - a^2} + x) + a \log(\sqrt{x^2 - a^2} - x)}{2}$$

--R Type: Expression Integer  
--E

--S 42 14:216 Schaums and Axiom differ by a constant  
dd:=complexNormalize cc

--R  
--R 
$$(4) \frac{a^2 \log(-a)}{2}$$

--R Type: Expression Integer  
--E

9 [1]:14.217  $\int x\sqrt{x^2 - a^2} dx$

$$\int x\sqrt{x^2 - a^2} = \frac{(x^2 - a^2)^{3/2}}{3}$$

```

(*)+≡
)clear all

--S 43
aa:=integrate(x*sqrt(x^2-a^2),x)
--R
--R
--R
--R
--R          +-----+
--R      5      2 3      4 | 2      2      6      2 4      4 2      6
--R      (- 4x + 7a x - 3a x)\|x - a + 4x - 9a x + 6a x - a
--R (1) -----
--R          +-----+
--R      2      2 | 2      2      3      2
--R      (12x - 3a )\|x - a - 12x + 9a x
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E

--S 44
bb:=(x^2-a^2)^(3/2)/3
--R
--R
--R          +-----+
--R      2      2 | 2      2
--R      (x - a )\|x - a
--R (2) -----
--R      3
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

--S 45      14:217 Schaums and Axiom agree
cc:=aa-bb
--R
--R
--R (3)  0
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

10 [1]:14.218  $\int x^2 \sqrt{x^2 - a^2} dx$

$$\int x^2 \sqrt{x^2 - a^2} = \frac{x(x^2 - a^2)^{3/2}}{4} + \frac{a^2 x \sqrt{x^2 - a^2}}{8} - \frac{a^4}{8} \ln(x + \sqrt{x^2 - a^2})$$

```

(*)+=
)clear all

--S 46
aa:=integrate(x^2*sqrt(x^2-a^2),x)
--R
--R
--R (1)
--R
--R          +-----+
--R      4 3      6 | 2      2      4 4      6 2      8      | 2      2
--R      ((8a x  - 4a x)\|x  - a  - 8a x  + 8a x  - a )log(\|x  - a  - x)
--R
--R      +
--R
--R          +-----+
--R      7      2 5      4 3      6 | 2      2      8      2 6      4 4      6 2
--R      (- 16x  + 24a x  - 10a x  + a x)\|x  - a  + 16x  - 32a x  + 20a x  - 4a x
--R
--R      /
--R
--R          +-----+
--R      3      2 | 2      2      4      2 2      4
--R      (64x  - 32a x)\|x  - a  - 64x  + 64a x  - 8a
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E

--S 47
bb:=(x*(x^2-a^2)^(3/2))/4+(a^2*x*sqrt(x^2-a^2))/8-a^4/8*log(x+sqrt(x^2-a^2))
--R
--R
--R          +-----+
--R      4      | 2      2      3      2 | 2      2
--R      - a log(\|x  - a  + x) + (2x  - a x)\|x  - a
--R
--R      (2) -----
--R
--R                                          8
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

--S 48
cc:=aa-bb
--R
--R
--R          +-----+
--R      4      | 2      2      4      | 2      2
--R      a log(\|x  - a  + x) + a log(\|x  - a  - x)
--R
--R      (3) -----
--R
--R                                          8

```

--R  
--R Type: Expression Integer  
--E

--S 49 14:218 Schaums and Axiom differ by a constant  
dd:=complexNormalize cc

--R  
--R 
$$(4) \frac{a^4 \log(-a^2)}{8}$$

--R  
--R Type: Expression Integer  
--E

11 [1]:14.219  $\int x^3 \sqrt{x^2 - a^2} dx$

$$\int x^3 \sqrt{x^2 - a^2} = \frac{(x^2 - a^2)^{5/2}}{5} + \frac{a^2(x^2 - a^2)^{3/2}}{3}$$

```

(*)+≡
)clear all

--S 50
aa:=integrate(x^3*sqrt(x^2-a^2),x)
--R
--R
--R (1)
--R
--R          +-----+
--R      9      2 7      4 5      6 3      8 | 2 2      10      2 8
--R      (- 48x  + 76a x  - 3a x  - 35a x  + 10a x)\|x  - a  + 48x  - 100a x
--R      +
--R      4 6      6 4      8 2      10
--R      35a x  + 40a x  - 25a x  + 2a
--R      /
--R          +-----+
--R      4      2 2      4 | 2 2      5      2 3      4
--R      (240x  - 180a x  + 15a )\|x  - a  - 240x  + 300a x  - 75a x
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E

--S 51
bb:=(x^2-a^2)^(5/2)/5+(a^2*(x^2-a^2)^(3/2))/3
--R
--R          +-----+
--R      4      2 2      4 | 2 2
--R      (3x  - a x  - 2a )\|x  - a
--R (2) -----
--R                                  15
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

--S 52      14:219 Schaums and Axiom agree
cc:=aa-bb
--R
--R (3)  0
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```



12 [1]:14.220  $\int \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x} dx$

$$\int \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x} = \sqrt{x^2 - a^2} - a \sec^{-1} \left| \frac{x}{a} \right|$$

(\*)+=  
)clear all

--S 53

aa:=integrate(sqrt(x^2-a^2)/x,x)

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

(1) 
$$\frac{(-2a\sqrt{x^2 - a^2} + 2ax)\operatorname{atan}\left(\frac{\sqrt{x^2 - a^2} - x}{a}\right) - x\sqrt{x^2 - a^2} + x^2 - a^2}{\sqrt{x^2 - a^2} - x}$$
Type: Union(Expression Integer,...)

--S 54

bb:=sqrt(x^2-a^2)-a\*asec(x/a)

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

(2) 
$$\sqrt{x^2 - a^2} - a \operatorname{asec}\left(\frac{x}{a}\right)$$
Type: Expression Integer

--S 55

cc:=aa-bb

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

(3) 
$$-2a \operatorname{atan}\left(\frac{\sqrt{x^2 - a^2} - x}{a}\right) + a \operatorname{asec}\left(\frac{x}{a}\right)$$
Type: Expression Integer

```

--S 56
atanrule:=rule(atan(x) == -%i/2*log((1+%i*x)/(1-%i*x)))
--R
--R
--R          - x + %i
--R      %i log(-----)
--R          x + %i
--R (4) atan(x) == - -----
--R                    2
--R      Type: RewriteRule(Integer,Complex Integer,Expression Complex Integer)
--E

```

```

--S 57
dd:=atanrule cc
--R
--R
--R          +-----+
--R          | 2    2
--R      - \|x - a  + x + %i a      x
--R (5) %i a log(-----) + a asec(-)
--R          +-----+
--R          | 2    2
--R      \|x - a  - x + %i a
--R
--R                                          Type: Expression Complex Integer
--E

```

```

--S 58
asecrule:=rule(asec(x) == 1/2*pi+%i*log(sqrt(1-1/x^2)+%i/x))
--R
--R
--R          +-----+
--R          | 2
--R          |x - 1
--R      x |----- + %i
--R          | 2
--R          \| x
--R      2%i log(-----) + %pi
--R                    x
--R (6) asec(x) == -----
--R                    2
--R      Type: RewriteRule(Integer,Complex Integer,Expression Complex Integer)
--E

```

```

--S 59
ee:=asecrule dd
--R
--R (7)
--R
--R          +-----+
--R          | 2    2

```

```

--R      |x  - a
--R      x |----- + %i a
--R      |  2
--R      \|  x
--R      2%i a log(-----) + 2%i a log(-----) + a %pi
--R      x
--R      +-----+
--R      | 2  2
--R      - \|x  - a  + x + %i a
--R      +-----+
--R      | 2  2
--R      \|x  - a  - x + %i a
-----
--R
--R      2
--R
--R      Type: Expression Complex Integer
--E

```

```

--S 60
ff:=expandLog ee
--R
--R      (8)
--R      +-----+
--R      | 2  2
--R      - 2%i a log(\|x  - a  - x + %i a) + 2%i a log(\|x  - a  - x - %i a)
--R      +
--R      +-----+
--R      | 2  2
--R      \|x  - a
--R      2%i a log(x |----- + %i a) - 2%i a log(x) + 2%i a log(- 1) + a %pi
--R      |  2
--R      \|  x
--R      /
--R      2
--R
--R      Type: Expression Complex Integer
--E

```

```

--S 61
gg:=rootSimp ff
--R
--R      (9)
--R      +-----+
--R      | 2  2
--R      2%i a log(\|x  - a  + %i a) - 2%i a log(\|x  - a  - x + %i a)
--R      +
--R      +-----+
--R      | 2  2
--R      2%i a log(\|x  - a  - x - %i a) - 2%i a log(x) + 2%i a log(- 1) + a %pi
--R      /
--R      2
--R
--R      Type: Expression Complex Integer

```

--E

--S 62 14:220 Schaums and Axiom differ by a constant

hh:=complexNormalize gg

--R

--R a %pi

--R (10) -----

--R 2

--R

Type: Expression Complex Integer

--E

**13 [1]:14.221**  $\int \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x^2} dx$

$$\int \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x^2} = -\frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x} + \ln(x + \sqrt{x^2 - a^2})$$

```
(*)+=
)clear all
```

```
--S 63
```

```
aa:=integrate(sqrt(x^2-a^2)/x^2,x)
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R      +-----+      +-----+
--R      | 2  2      2      | 2  2      2
--R      (- x\|x - a + x )log(\|x - a - x) + a
--R (1) -----
--R      +-----+
--R      | 2  2      2
--R      x\|x - a - x
```

```
Type: Union(Expression Integer,...)
```

```
--E
```

```
--S 64
```

```
bb:=-sqrt(x^2-a^2)/x+log(x+sqrt(x^2-a^2))
```

```
--R
```

```
--R      +-----+      +-----+
--R      | 2  2      2      | 2  2
--R      x log(\|x - a + x) - \|x - a
--R (2) -----
--R      x
```

```
Type: Expression Integer
```

```
--E
```

```
--S 65
```

```
cc:=aa-bb
```

```
--R
```

```
--R      +-----+      +-----+
--R      | 2  2      2      | 2  2
--R (3) - log(\|x - a + x) - log(\|x - a - x) - 1
```

```
Type: Expression Integer
```

```
--E
```

```
--S 66 14:221 Schaums and Axiom differ by a constant
```

```
dd:=complexNormalize cc
```

```
--R
```

```
--R  
--R      2  
--R (4) - log(- a ) - 1  
--R  
--E
```

Type: Expression Integer

14 [1]:14.222  $\int \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x^3} dx$

$$\int \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x^3} = -\frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{2x^2} + \frac{1}{2a} \sec^{-1} \left| \frac{x}{a} \right|$$

```
(*)+=
)clear all
```

```
--S 67
```

```
aa:=integrate(sqrt(x^2-a^2)/x^3,x)
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R (1)
```

```
--R
```

$$(4x^3 \sqrt{x^2 - a^2} - 4x^4 + 2a^2 x^2) \operatorname{atan}\left(\frac{\sqrt{x^2 - a^2} - x}{a}\right)$$

```
--R
```

```
--R +
```

```
--R
```

$$(2a^2 x^3 - a^3) \sqrt{x^2 - a^2} - 2a^3 x^3 + 2a^3 x^3$$

```
--R /
```

```
--R
```

```
--R
```

$$4a^3 x^3 \sqrt{x^2 - a^2} - 4a^4 x^4 + 2a^3 x^2$$

```
--R
```

Type: Union(Expression Integer,...)

```
--E
```

```
--S 68
```

```
bb:=-sqrt(x^2-a^2)/(2*x^2)+1/(2*a)*asec(x/a)
```

```
--R
```

```
--R
```

$$-a \sqrt{x^2 - a^2} + x \operatorname{asec}\left(\frac{x}{a}\right)$$

```
--R
```

```
--R (2) -----
```

$$2a^2 x^2$$

```
--R
```

Type: Expression Integer

```
--E
```

```
--S 69
```

```
cc:=aa-bb
```

```
--R
```

```

--R          +-----+
--R          | 2    2
--R          \|x  - a  - x      x
--R          2atan(-----) - asec(-)
--R                   a          a
--R (3) -----
--R                   2a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 70
asecrule:=rule(asec(x) == 1/2*pi+%i*log(sqrt(1-1/x^2)+%i/x))
--R
--R          +-----+
--R          | 2
--R          |x  - 1
--R          x |----- + %i
--R            | 2
--R            \| x
--R          2%i log(-----) + %pi
--R                   x
--R (4) asec(x) == -----
--R                   2
--R          Type: RewriteRule(Integer,Complex Integer,Expression Complex Integer)
--E

```

```

--S 71
dd:=asecrule cc
--R
--R          +-----+
--R          | 2    2
--R          |x  - a
--R          x |----- + %i a          +-----+
--R            | 2    2
--R            \| x          \|x  - a  - x
--R          - 2%i log(-----) + 4atan(-----) - %pi
--R                   x          a
--R (5) -----
--R                   4a
--R
--R                                          Type: Expression Complex Integer
--E

```

```

--S 72
atanrule:=rule(atan(x) == -%i/2*log((1+%i*x)/(1-%i*x)))
--R
--R          - x + %i

```



```

--R          %i log(-----)
--R          x + %i
--R (6) atan(x) == - -----
--R                    2
--R      Type: RewriteRule(Integer,Complex Integer,Expression Complex Integer)
--E

```

```

--S 73
ee:=atanrule dd

```

```

--R
--R          +-----+
--R          | 2  2
--R          |x  - a
--R          x |-----+ + %i a
--R          | 2
--R          \|  x
--R          - 2%i log(-----) - 2%i log(-----) - %pi
--R                    x
--R                    +-----+
--R                    | 2  2
--R                    - \|x  - a  + x + %i a
--R                    +-----+
--R                    | 2  2
--R                    \|x  - a  - x + %i a
--R (7) -----
--R                                     4a
--R                                     Type: Expression Complex Integer
--E

```

```

--S 74
ff:=expandLog ee

```

```

--R
--R (8)
--R          +-----+
--R          | 2  2
--R          2%i log(\|x  - a  - x + %i a) - 2%i log(\|x  - a  - x - %i a)
--R +
--R          +-----+
--R          | 2  2
--R          |x  - a
--R          - 2%i log(x |-----+ + %i a) + 2%i log(x) - 2%i log(- 1) - %pi
--R          | 2
--R          \|  x
--R /
--R 4a
--R
--R                                     Type: Expression Complex Integer
--E

```

```

--S 75
gg:=rootSimp ff

```

```

--R
--R (9)
--R          +-----+          +-----+
--R          | 2  2          | 2  2
--R - 2%i log(\|x - a + %i a) + 2%i log(\|x - a - x + %i a)
--R +
--R          +-----+
--R          | 2  2
--R - 2%i log(\|x - a - x - %i a) + 2%i log(x) - 2%i log(- 1) - %pi
--R /
--R 4a
--R
--R                                          Type: Expression Complex Integer
--E

```

```

--S 76      14:222 Schaums and Axiom differ by a constant
hh:=complexNormalize gg

```

```

--R
--R          %pi
--R (10) - ----
--R          4a
--R
--R                                          Type: Expression Complex Integer
--E

```

15 [1]:14.223  $\int \frac{dx}{(x^2 - a^2)^{3/2}}$

$$\int \frac{1}{(x^2 - a^2)^{3/2}} = -\frac{x}{a^2 \sqrt{x^2 - a^2}}$$

```
(*)+≡
)clear all
```

```
--S 77
aa:=integrate(1/(x^2-a^2)^(3/2),x)
```

```
--R
--R
--R
--R (1) - -----
--R          +-----+
--R          | 2    2    2    2
--R          x\|x  - a  - x  + a
```

Type: Union(Expression Integer,...)

```
--E
```

```
--S 78
bb:=-x/(a^2*sqrt(x^2-a^2))
```

```
--R
--R
--R          x
--R (2) - -----
--R          +-----+
--R          2 | 2    2
--R          a \|x  - a
```

Type: Expression Integer

```
--E
```

```
--S 79 14:223 Schaums and Axiom differ by a constant
```

```
cc:=aa-bb
```

```
--R
--R
--R          1
--R (3) - --
--R          2
--R          a
```

Type: Expression Integer

```
--E
```

16 [1]:14.224  $\int \frac{x dx}{(x^2 - a^2)^{3/2}}$

$$\int \frac{x}{(x^2 - a^2)^{3/2}} = \frac{-1}{\sqrt{x^2 - a^2}}$$

```

(*)+=
)clear all

--S 80
aa:=integrate(x/(x^2-a^2)^(3/2),x)
--R
--R
--R          +-----+
--R          | 2    2
--R          \|x  - a  - x
--R (1)  -----
--R          +-----+
--R          | 2    2    2    2
--R          x\|x  - a  - x  + a
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E

--S 81
bb:=-1/sqrt(x^2-a^2)
--R
--R
--R          1
--R (2)  - ----
--R          +-----+
--R          | 2    2
--R          \|x  - a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

--S 82      14:224 Schaums and Axiom agree
cc:=aa-bb
--R
--R (3)  0
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

17 [1]:14.225  $\int \frac{x^2 dx}{(x^2 - a^2)^{3/2}}$

$$\int \frac{x^2}{(x^2 - a^2)^{3/2}} = \frac{-x}{\sqrt{x^2 - a^2}} + \ln(x + \sqrt{x^2 - a^2})$$

(\*)+=  
)clear all

--S 83

aa:=integrate(x^2/(x^2-a^2)^(3/2),x)

--R

--R

$$(1) \frac{(-x\sqrt{x^2 - a^2} + x^2 - a^2)\log(\sqrt{x^2 - a^2} - x) - a^2}{x\sqrt{x^2 - a^2} - x^2 + a^2}$$

--R

--R

--R

--R

--E

Type: Union(Expression Integer,...)

--S 84

bb:=-x/sqrt(x^2-a^2)+log(x+sqrt(x^2-a^2))

--R

--R

$$(2) \frac{\sqrt{x^2 - a^2} \log(\sqrt{x^2 - a^2} + x) - x}{\sqrt{x^2 - a^2}}$$

--R

--R

--R

--R

--E

Type: Expression Integer

--S 85

cc:=aa-bb

--R

--R

$$(3) -\log(\sqrt{x^2 - a^2} + x) - \log(\sqrt{x^2 - a^2} - x) - 1$$

--R

--E

Type: Expression Integer

--S 86 14:225 Schaums and Axiom differ by a constant

```
dd:=complexNormalize cc
--R
--R      2
--R (4) - log(- a ) - 1
--R
--E
```

Type: Expression Integer

18 [1]:14.226  $\int \frac{x^3 dx}{(x^2 - a^2)^{3/2}}$

$$\int \frac{x^3}{(x^2 - a^2)^{3/2}} = \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{\sqrt{x^2 - a^2}}$$

```
(*)+=
)clear all
```

```
--S 87
aa:=integrate(x^3/(x^2-a^2)^(3/2),x)
```

```
--R
--R
--R          +-----+
--R      3      2      | 2      2      4      2 2      4
--R      (- 2x  + 4a x)\|x  - a  + 2x  - 5a x  + 2a
--R (1) -----
--R          +-----+
--R      2      2      | 2      2      3      2
--R      (2x  - a )\|x  - a  - 2x  + 2a x
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E
```

```
--S 88
bb:=sqrt(x^2-a^2)-a^2/sqrt(x^2-a^2)
```

```
--R
--R      2      2
--R      x  - 2a
--R (2) -----
--R      +-----+
--R      | 2      2
--R      \|x  - a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E
```

```
--S 89      14:226 Schaums and Axiom agree
cc:=aa-bb
```

```
--R
--R (3)  0
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E
```

19 [1]:14.227  $\int \frac{dx}{x(x^2 - a^2)^{3/2}}$

$$\int \frac{1}{x(x^2 - a^2)^{3/2}} = \frac{-1}{a^2 \sqrt{x^2 - a^2}} - \frac{1}{a^3} \sec^{-1} \left| \frac{x}{a} \right|$$

```
(*)+=
)clear all
```

```
--S 90
```

```
aa:=integrate(1/(x*(x^2-a^2)^(3/2)),x)
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
(1) -----
          +-----+
          | 2 2      2 2      \|x - a - x      +-----+
(- 2x\|x - a + 2x - 2a )atan(-----) + a\|x - a - a x
                                 a
-----
          +-----+
          3 | 2 2      3 2 5
a x\|x - a - a x + a
Type: Union(Expression Integer,...)
```

```
--S 91
```

```
bb:=-1/(a^2*sqrt(x^2-a^2))-1/a^3*asec(x/a)
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

Type: Expression Integer

```
--S 92
```

```
cc:=aa-bb
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
- 2atan(-----) + asec(-)
          +-----+
          | 2 2
          \|x - a - x      x
```



```

--R
--R      a      a
--R (3) -----
--R      3
--R      a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 93
atanrule:=rule(atan(x) == -%i/2*log((1+%i*x)/(1-%i*x)))
--R
--R      - x + %i
--R      %i log(-----)
--R      x + %i
--R (4) atan(x) == - -----
--R      2
--R
--R      Type: RewriteRule(Integer,Complex Integer,Expression Complex Integer)
--E

```

```

--S 94
dd:=atanrule cc
--R
--R      +-----+
--R      | 2  2
--R      - \|x - a  + x + %i a      x
--R      %i log(-----) + asec(-)
--R      +-----+
--R      | 2  2
--R      \|x - a  - x + %i a
--R (5) -----
--R      3
--R      a
--R
--R                                          Type: Expression Complex Integer
--E

```

```

--S 95
asecrule:=rule(asec(x) == 1/2*%pi+%i*log(sqrt(1-1/x^2)+%i/x))
--R
--R      +-----+
--R      | 2
--R      |x - 1
--R      x |----- + %i
--R      | 2
--R      \| x
--R      2%i log(-----) + %pi
--R      x
--R (6) asec(x) == -----

```

```

--R
--R                                     2
--R      Type: RewriteRule(Integer,Complex Integer,Expression Complex Integer)
--E

```

```

--S 96
ee:=asecrule dd

```

```

--R
--R      +-----+
--R      | 2 2
--R      |x - a
--R      x |-----+ %i a
--R      | 2
--R      \| x
--R      2%i log(-----) + 2%i log(-----) + %pi
--R                                     +-----+
--R                                     | 2 2
--R                                     - \|x - a + x + %i a
--R                                     +-----+
--R                                     | 2 2
--R                                     \|x - a - x + %i a
--R (7) -----
--R                                     3
--R                                     2a
--R                                     Type: Expression Complex Integer
--E

```

```

--S 97
ff:=expandLog ee

```

```

--R
--R (8)
--R      +-----+
--R      | 2 2
--R      - 2%i log(\|x - a - x + %i a) + 2%i log(\|x - a - x - %i a)
--R      +
--R      +-----+
--R      | 2 2
--R      |x - a
--R      2%i log(x |-----+ %i a) - 2%i log(x) + 2%i log(- 1) + %pi
--R      | 2
--R      \| x
--R /
--R      3
--R      2a
--R
--R                                     Type: Expression Complex Integer
--E

```

```

--S 98
gg:=rootSimp ff
--R

```

```

--R (9)
--R          +-----+          +-----+
--R          | 2  2          | 2  2
--R      2%i log(\|x  - a  + %i a) - 2%i log(\|x  - a  - x + %i a)
--R      +
--R          +-----+
--R          | 2  2
--R      2%i log(\|x  - a  - x - %i a) - 2%i log(x) + 2%i log(- 1) + %pi
--R      /
--R      3
--R      2a
--R
--R                                          Type: Expression Complex Integer
--E

```

--S 99 14:227 Schaums and Axiom differ by a constant

hh:=complexNormalize gg

```

--R
--R      %pi
--R (10) ---
--R      3
--R      2a
--R
--R                                          Type: Expression Complex Integer
--E

```

20 [1]:14.228  $\int \frac{dx}{x^2(x^2 - a^2)^{3/2}}$

$$\int \frac{1}{x^2(x^2 - a^2)^{3/2}} = -\frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a^4 x} - \frac{x}{a^4 \sqrt{x^2 - a^2}}$$

```
(*)+≡
)clear all
```

```
--S 100
aa:=integrate(1/(x^2*(x^2-a^2)^(3/2)),x)
```

```
--R
--R
--R
--R (1) - -----
--R              +-----+
--R          3      2 | 2      2      4      2 2
--R      (2x  - a x)\|x  - a  - 2x  + 2a x
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E
```

```
--S 101
bb:=-sqrt(x^2-a^2)/(a^4*x)-x/(a^4*sqrt(x^2-a^2))
```

```
--R
--R
--R          2      2
--R      - 2x  + a
--R (2) -----
--R      +-----+
--R      4 | 2      2
--R      a x \|x  - a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E
```

```
--S 102 14:228 Schaums and Axiom differ by a constant
cc:=aa-bb
```

```
--R
--R
--R (3) - --
--R      4
--R      a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E
```

**21 [1]:14.229**     $\int \frac{dx}{x^3(x^2 - a^2)^{3/2}}$

$$\int \frac{1}{x^3(x^2 - a^2)^{3/2}} = \frac{1}{2a^2x^2\sqrt{x^2 - a^2}} - \frac{3}{2a^4\sqrt{x^2 - a^2}} - \frac{3}{2a^5} \sec^{-1} \left| \frac{x}{a} \right|$$

```

(*)+=
)clear all

--S 103
aa:=integrate(1/(x^3*(x^2-a^2)^(3/2)),x)
--R
--R
--R (1)
--R
--R          +-----+
--R          | 2  2
--R          \|x  - a  - x
--R      5      2 3 | 2  2      6      2 4      4 2      |-----|
--R      ((- 24x  + 18a x)\|x  - a  + 24x  - 30a x  + 6a x )atan(-----)
--R                                                                 a
--R +
--R          +-----+
--R          | 2  2      5      3 3      5
--R      (12a x  - 7a x  + a)\|x  - a  - 12a x  + 13a x  - 3a x
--R /
--R          +-----+
--R          | 2  2      5 6      7 4      9 2
--R      (8a x  - 6a x)\|x  - a  - 8a x  + 10a x  - 2a x
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E

--S 104
bb:=1/(2*a^2*x^2*sqrt(x^2-a^2))-3/(2*a^4*sqrt(x^2-a^2))-3/(2*a^5)*asec(x/a)
--R
--R          +-----+
--R          | 2  2      2  3
--R      - 3x asec(-)\|x  - a  - 3a x  + a
--R          a
--R (2) -----
--R          +-----+
--R          | 2  2
--R      2a x \|x  - a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

--S 105
cc:=aa-bb

```

```

--R
--R          +-----+
--R          | 2    2
--R          \|x  - a  - x      x
--R      - 6atan(-----) + 3asec(-)
--R                    a                    a
--R (3) -----
--R                    5
--R                   2a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 106
atanrule:=rule(atan(x) == -%i/2*log((1+%i*x)/(1-%i*x)))
--R
--R          - x + %i
--R      %i log(-----)
--R                x + %i
--R (4) atan(x) == - -----
--R                    2
--R
--R      Type: RewriteRule(Integer,Complex Integer,Expression Complex Integer)
--E

```

```

--S 107
dd:=atanrule cc
--R
--R          +-----+
--R          | 2    2
--R      - \|x  - a  + x + %i a      x
--R  3%i log(-----) + 3asec(-)
--R                    +-----+
--R                    | 2    2
--R                    \|x  - a  - x + %i a
--R (5) -----
--R                    5
--R                   2a
--R
--R                                          Type: Expression Complex Integer
--E

```

```

--S 108
asecrule:=rule(asec(x) == 1/2*%pi+%i*log(sqrt(1-1/x^2)+%i/x))
--R
--R          +-----+
--R          | 2
--R          |x  - 1
--R      x |----- + %i

```

```

--R
--R      |  2
--R     \| x
--R      2%i log(-----) + %pi
--R                      x
--R (6) asec(x) == -----
--R                      2
--R      Type: RewriteRule(Integer,Complex Integer,Expression Complex Integer)
--E

```

```

--S 109
ee:=asecrule dd

```

```

--R
--R      +-----+
--R      |  2  2
--R      |x  - a
--R      x |-----+ + %i a
--R      |  2
--R      \| x
--R      6%i log(-----) + 6%i log(-----) + 3%pi
--R                      x
--R                      +-----+
--R                      |  2  2
--R                      - \|x  - a  + x + %i a
--R                      +-----+
--R                      |  2  2
--R                      \|x  - a  - x + %i a
--R (7) -----
--R                      5
--R                     4a
--R      Type: Expression Complex Integer
--E

```

```

--S 110
ff:=expandLog ee

```

```

--R
--R (8)
--R      +-----+
--R      |  2  2
--R      - 6%i log(\|x  - a  - x + %i a) + 6%i log(\|x  - a  - x - %i a)
--R      +
--R      +-----+
--R      |  2  2
--R      |x  - a
--R      6%i log(x |-----+ + %i a) - 6%i log(x) + 6%i log(- 1) + 3%pi
--R      |  2
--R      \| x
--R /
--R      5
--R     4a
--R
--R      Type: Expression Complex Integer

```

```

--E
--S 111
gg:=rootSimp ff
--R
--R (9)
--R          +-----+          +-----+
--R          | 2    2          | 2    2
--R      6%i log(\|x  - a  + %i a) - 6%i log(\|x  - a  - x + %i a)
--R    +
--R          +-----+
--R          | 2    2
--R      6%i log(\|x  - a  - x - %i a) - 6%i log(x) + 6%i log(- 1) + 3%pi
--R  /
--R      5
--R    4a
--R
--R                                          Type: Expression Complex Integer
--E

```

```

--S 112    14:229 Schaums and Axiom differ by a constant
hh:=complexNormalize gg
--R
--R      3%pi
--R (10) ----
--R      5
--R    4a
--R
--R                                          Type: Expression Complex Integer
--E

```



22 [1]:14.230  $\int (x^2 - a^2)^{3/2} dx$

$$\int (x^2 - a^2)^{3/2} = \frac{x(x^2 - a^2)^{3/2}}{4} - \frac{3a^2x\sqrt{x^2 - a^2}}{8} + \frac{3}{8}a^4 \ln(x + \sqrt{x^2 - a^2})$$

```

(*)+≡
)clear all

--S 113
aa:=integrate((x^2-a^2)^(3/2),x)
--R
--R
--R (1)
--R
--R          +-----+
--R      4 3      6 | 2 2      4 4      6 2      8      | 2 2
--R      ((- 24a x + 12a x)\|x - a + 24a x - 24a x + 3a )log(\|x - a - x)
--R
--R      +
--R
--R          +-----+
--R      7      2 5      4 3      6 | 2 2      8      2 6      4 4
--R      (- 16x + 56a x - 42a x + 5a x)\|x - a + 16x - 64a x + 68a x
--R
--R      +
--R      6 2
--R      - 20a x
--R
--R      /
--R
--R          +-----+
--R      3      2 | 2 2      4      2 2      4
--R      (64x - 32a x)\|x - a - 64x + 64a x - 8a
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E

```

```

--S 114
bb:=(x*(x^2-a^2)^(3/2))/4-(3*a^2*x*sqrt(x^2-a^2))/8+3/8*a^4*log(x+sqrt(x^2-a^2))
--R
--R
--R          +-----+
--R      4      | 2 2      3      2 | 2 2
--R      3a log(\|x - a + x) + (2x - 5a x)\|x - a
--R (2) -----
--R
--R                                          8
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 115
cc:=aa-bb
--R
--R
--R          +-----+
--R      4      | 2 2      4      | 2 2

```

```

--R      - 3a log(\|x - a + x) - 3a log(\|x - a - x)
--R (3) -----
--R                                  8
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 116      14:230 Schaums and Axiom differ by a constant
dd:=complexNormalize cc

```

```

--R
--R      4      2
--R      3a log(- a )
--R (4) - -----
--R              8
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

**23 [1]:14.231**  $\int x(x^2 - a^2)^{3/2} dx$

$$\int x(x^2 - a^2)^{3/2} = \frac{(x^2 - a^2)^{5/2}}{5}$$

```

(*)+=
)clear all

--S 117
aa:=integrate(x*(x^2-a^2)^(3/2),x)
--R
--R
--R (1)
--R
--R          +-----+
--R      9      2 7      4 5      6 3      8 | 2      2      10      2 8
--R      (- 16x  + 52a x  - 61a x  + 30a x  - 5a x)\|x  - a  + 16x  - 60a x
--R      +
--R      4 6      6 4      8 2      10
--R      85a x  - 55a x  + 15a x  - a
--R      /
--R          +-----+
--R      4      2 2      4 | 2      2      5      2 3      4
--R      (80x  - 60a x  + 5a )\|x  - a  - 80x  + 100a x  - 25a x
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E

--S 118
bb:=(x^2-a^2)^(5/2)/5
--R
--R
--R          +-----+
--R      4      2 2      4 | 2      2
--R      (x  - 2a x  + a )\|x  - a
--R (2) -----
--R                                  5
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

--S 119 14:231 Schaums and Axiom agree
cc:=aa-bb
--R
--R
--R (3) 0
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

24 [1]:14.232  $\int x^2(x^2 - a^2)^{3/2} dx$

$$\int x^2(x^2 - a^2)^{3/2} = \frac{x(x^2 - a^2)^{5/2}}{6} + \frac{a^2x(x^2 - a^2)^{3/2}}{24} - \frac{a^4x\sqrt{x^2 - a^2}}{16} + \frac{a^6}{16} \ln(x + \sqrt{x^2 - a^2})$$

<\*)+≡  
)clear all

--S 120

aa:=integrate(x^2\*(x^2-a^2)^(3/2),x)

--R

--R

--R (1)

```

--R
--R          +-----+
--R          6 5      8 3      10 | 2 2      6 6      8 4      10 2
--R      (- 96a x  + 96a x  - 18a x)\|x  - a  + 96a x  - 144a x  + 54a x
--R      +
--R          12
--R      - 3a
--R      *
--R          +-----+
--R          | 2 2
--R      log(\|x  - a  - x)
--R      +
--R          +-----+
--R          11      2 9      4 7      6 5      8 3      10 | 2 2
--R      (- 256x  + 832a x  - 912a x  + 404a x  - 68a x  + 3a x)\|x  - a
--R      +
--R          12      2 10      4 8      6 6      8 4      10 2
--R      256x  - 960a x  + 1296a x  - 772a x  + 198a x  - 18a x
--R      /
--R          +-----+
--R          5      2 3      4 | 2 2      6      2 4      4 2      6
--R      (1536x  - 1536a x  + 288a x)\|x  - a  - 1536x  + 2304a x  - 864a x  + 48a
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E

```

--S 121

bb:=(x\*(x^2-a^2)^(5/2))/6+(a^2\*x\*(x^2-a^2)^(3/2))/24-(a^4\*x\*sqrt(x^2-a^2))/16+a^6/16\*1

--R

--R

```

--R          +-----+
--R          6      | 2 2      5      2 3      4 | 2 2
--R      3a log(\|x  - a  + x) + (8x  - 14a x  + 3a x)\|x  - a
--R      (2) -----
--R
--R                                          48
--R
--R                                          Type: Expression Integer

```

--E

--S 122

cc:=aa-bb

--R

--R

$$\frac{-a \log(\sqrt{x^2 - a^2 + x}) - a \log(\sqrt{x^2 - a^2 - x})}{16}$$

--R (3)

16

Type: Expression Integer

--E

--S 123 14:232 Schaums and Axiom differ by a constant

dd:=complexNormalize cc

--R

--R

$$a \log(-a)$$

--R (4) - -----

16

Type: Expression Integer

--E

25 [1]:14.233  $\int x^3(x^2 - a^2)^{3/2} dx$

$$\int x^3(x^2 - a^2)^{3/2} = \frac{(x^2 - a^2)^{7/2}}{7} + \frac{a^2(x^2 - a^2)^{5/2}}{5}$$

```

(*)+≡
)clear all

--S 124
aa:=integrate(x^3*(x^2-a^2)^(3/2),x)
--R
--R
--R (1)
--R      13      2 11      4 9      6 7      8 5      10 3
--R      - 320x  + 1072a x  - 1240a x  + 467a x  + 112a x  - 105a x
--R      +
--R      12
--R      14a x
--R      *
--R      +-----+
--R      | 2 2
--R      \|x - a
--R      +
--R      14      2 12      4 10      6 8      8 6      10 4      12 2
--R      320x  - 1232a x  + 1736a x  - 973a x  + 21a x  + 175a x  - 49a x
--R      +
--R      14
--R      2a
--R      /
--R      +-----+
--R      6      2 4      4 2      6 | 2 2      7      2 5
--R      (2240x  - 2800a x  + 840a x  - 35a )\|x - a  - 2240x  + 3920a x
--R      +
--R      4 3      6
--R      - 1960a x  + 245a x
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E

```

```

--S 125
bb:=(x^2-a^2)^(7/2)/7+(a^2*(x^2-a^2)^(5/2))/5
--R
--R
--R      +-----+
--R      6      2 4      4 2      6 | 2 2
--R      (5x  - 8a x  + a x  + 2a )\|x - a
--R (2) -----
--R      35

```

```
--R                                         Type: Expression Integer
--E

--S 126      14:233 Schaums and Axiom agree
cc:=aa-bb
--R
--R      (3)  0
--R                                         Type: Expression Integer
--E
```

**26 [1]:14.234**  $\int \frac{(x^2 - a^2)^{3/2}}{x} dx$

$$\int \frac{(x^2 - a^2)^{3/2}}{x} = \frac{(x^2 - a^2)^{3/2}}{3} - a^2 \sqrt{x^2 - a^2} + a^3 \sec^{-1} \left| \frac{x}{a} \right|$$

(\*)+=

)clear all

--S 127

aa:=integrate((x^2-a^2)^(3/2)/x,x)

--R

--R

--R (1)

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

$$\frac{((24a^3 x^2 - 6a^5) \sqrt{x^2 - a^2} - 24a^3 x^3 + 18a^5 x) \operatorname{atan}\left(\frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a}\right) + (-4x^5 + 19a^2 x^3 - 12a^4 x) \sqrt{x^2 - a^2} + 4x^6 - 21a^2 x^4 + 21a^4 x^2 - 4a^6}{(12x^2 - 3a^2) \sqrt{x^2 - a^2} - 12x^3 + 9a^2}$$

Type: Union(Expression Integer,...)

--S 128

bb:=(x^2-a^2)^(3/2)/3-a^2\*sqrt(x^2-a^2)+a^3\*asec(x/a)

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

Type: Expression Integer

--S 129

cc:=aa-bb

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R



```

--R
--R      | 2  2
--R      3  \|x - a - x  3  x
--R (3) 2a atan(-----) - a asec(-)
--R              a              a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 130
asecrule:=rule(asec(x) == 1/2*%pi+%i*log(sqrt(1-1/x^2)+%i/x))
--R
--R      +-----+
--R      | 2
--R      |x - 1
--R      x |----- + %i
--R      | 2
--R      \| x
--R      2%i log(-----) + %pi
--R              x
--R (4) asec(x) == -----
--R              2
--R
--R      Type: RewriteRule(Integer,Complex Integer,Expression Complex Integer)
--E

```

```

--S 131
dd:=asecrule cc
--R
--R      +-----+
--R      | 2  2
--R      |x - a
--R      x |----- + %i a
--R      | 2
--R      3  \| x
--R      - 2%i a log(-----) + 4a atan(-----) - a %pi
--R              x              a
--R (5) -----
--R              2
--R
--R                                          Type: Expression Complex Integer
--E

```

```

--S 132
atanrule:=rule(atan(x) == -%i/2*log((1+%i*x)/(1-%i*x)))
--R
--R      - x + %i
--R      %i log(-----)
--R              x + %i
--R (6) atan(x) == - -----

```

```

--R
--R      2
--R      Type: RewriteRule(Integer,Complex Integer,Expression Complex Integer)
--E

```

```

--S 133
ee:=atanrule dd

```

```

--R
--R      (7)
--R
--R      +-----+
--R      | 2  2
--R      |x  - a
--R      x |-----+ + %i a
--R      | 2
--R      \| x
--R      3
--R      - 2%i a log(-----) - 2%i a log(-----) - a %pi
--R      x
--R
--R      +-----+
--R      | 2  2
--R      - \|x  - a  + x + %i a
--R      3
--R
--R      +-----+
--R      | 2  2
--R      \|x  - a  - x + %i a
--R
-----
--R
--R      2
--R      Type: Expression Complex Integer
--E

```

```

--S 134
ff:=expandLog ee

```

```

--R
--R      (8)
--R
--R      +-----+
--R      | 2  2
--R      3
--R      2%i a log(\|x  - a  - x + %i a) - 2%i a log(\|x  - a  - x - %i a)
--R
--R      +
--R
--R      +-----+
--R      | 2  2
--R      |x  - a
--R      3
--R      - 2%i a log(x |-----+ + %i a) + 2%i a log(x) - 2%i a log(- 1) - a %pi
--R      | 2
--R      \| x
--R
--R      /
--R
--R      2
--R
--R      Type: Expression Complex Integer
--E

```

```

--S 135
gg:=rootSimp ff

```

```

--R
--R      (9)

```

```

--R          +-----+          +-----+
--R          3      | 2      2          3      | 2      2
--R      - 2%i a log(\|x - a + %i a) + 2%i a log(\|x - a - x + %i a)
--R      +
--R          +-----+
--R          3      | 2      2          3          3          3
--R      - 2%i a log(\|x - a - x - %i a) + 2%i a log(x) - 2%i a log(- 1) - a %pi
--R      /
--R      2
--R
--R                                          Type: Expression Complex Integer
--E

```

--S 136 14:234 Schaums and Axiom differ by a constant

hh:=complexNormalize gg

```

--R
--R          3
--R          a %pi
--R      (10) - ----
--R          2
--R
--R                                          Type: Expression Complex Integer
--E

```

27 [1]:14.235  $\int \frac{(x^2 - a^2)^{3/2}}{x^2} dx$

$$\int \frac{(x^2 - a^2)^{3/2}}{x^2} = -\frac{(x^2 - a^2)^{3/2}}{x} + \frac{3x\sqrt{x^2 - a^2}}{2} - \frac{3}{2}a^2 \ln(x + \sqrt{x^2 - a^2})$$

(\*)+=  
)clear all

--S 137

aa:=integrate((x^2-a^2)^{3/2}/x^2,x)

--R

--R

--R (1)

$$\frac{((12a^2x^3 - 3a^4x)\sqrt{x^2 - a^2} - 12a^2x^4 + 9a^4x^2)\log(\sqrt{x^2 - a^2} - x) + (-4x^5 + 3a^2x^3 + 4a^4x)\sqrt{x^2 - a^2} + 4x^6 - 5a^2x^4 - 3a^4x^2 + 2a^6}{(8x^3 - 2a^2x)\sqrt{x^2 - a^2} - 8x^4 + 6a^2x^2}$$

--R

--R

--R /

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--E

Type: Union(Expression Integer,...)

--S 138

bb:=-x^2-a^2)^{3/2}/x+3\*x\*sqrt(x^2-a^2)/2-3/2\*a^2\*log(x+sqrt(x^2-a^2))

--R

--R

--R

--R

--R (2)

--R

--R

--R

--E

Type: Expression Integer

--S 139

cc:=aa-bb

--R

--R

--R

--R

--R (3)

--R

$$\frac{3a^2 \log(\sqrt{x^2 - a^2} + x) + 3a^2 \log(\sqrt{x^2 - a^2} - x) + 2a^2}{2x}$$

```
--R
--R
--R                                     2
--R                                     Type: Expression Integer
--E
```

```
--S 140      14:235 Schaums and Axiom differ by a constant
dd:=complexNormalize cc
```

```
--R
--R
--R          2      2      2
--R      3a log(- a ) + 2a
--R (4)  -----
--R          2
--R
--R                                     Type: Expression Integer
--E
```

28 [1]:14.236  $\int \frac{(x^2 - a^2)^{3/2}}{x^3} dx$

$$\int \frac{(x^2 - a^2)^{3/2}}{x^3} = -\frac{(x^2 - a^2)^{3/2}}{2x^2} + \frac{3}{2}\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{3}{2}a \sec^{-1} \left| \frac{x}{a} \right|$$

```
(*)+=
)clear all

--S 141
aa:=integrate((x^2-a^2)^(3/2)/x^3,x)
--R 
--R 
--R (1)
--R                                             +-----+
--R                               +-----+   | 2  2
--R                     4     3 2  | 2  2     5     3 3   \|x  - a  - x
--R          ((- 24a x  + 6a x )\|x  - a  + 24a x  - 18a x )atan(-----)
--R                                                    a
--R  +
--R                               +-----+
--R                    5     2 3    4    | 2  2     6     2 4    4 2    6
--R          (- 8x  + 2a x  + 3a x )\|x  - a  + 8x  - 6a x  - 3a x  + a
--R  /
--R                               +-----+
--R                     4     2 2  | 2  2     5     2 3
--R          (8x  - 2a x )\|x  - a  - 8x  + 6a x
--R                                                     Type: Union(Expression Integer,...)
--E
```

```
--S 142
bb:=- (x^2-a^2)^(3/2)/(2*x^2)+(3*sqrt(x^2-a^2))/2-3/2*a*asec(x/a)
--R 
--R                               +-----+
--R                   2     2  | 2  2           2     x
--R          (2x  + a )\|x  - a  - 3a x asec(-
--R                                                  a
--R (2) -----
--R                         2
--R                       2x
--R                                                     Type: Expression Integer
--E
```

```
--S 143
cc:=aa-bb
--R
```

```

--R          +-----+
--R          | 2    2
--R          \|x  - a  - x          x
--R      - 6a atan(-----) + 3a asec(-)
--R                    a          a
--R (3) -----
--R                    2
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 144
atanrule:=rule(atan(x) == -%i/2*log((1+%i*x)/(1-%i*x)))
--R
--R          - x + %i
--R      %i log(-----)
--R          x + %i
--R (4) atan(x) == - -----
--R                    2
--R
--R      Type: RewriteRule(Integer,Complex Integer,Expression Complex Integer)
--E

```

```

--S 145
dd:=atanrule cc
--R
--R          +-----+
--R          | 2    2
--R      - \|x  - a  + x + %i a          x
--R  3%i a log(-----) + 3a asec(-)
--R                    +-----+
--R                    | 2    2
--R                    \|x  - a  - x + %i a
--R (5) -----
--R                    2
--R
--R                                          Type: Expression Complex Integer
--E

```

```

--S 146
asecrule:=rule(asec(x) == 1/2*%pi+%i*log(sqrt(1-1/x^2)+%i/x))
--R
--R          +-----+
--R          | 2
--R          |x  - 1
--R      x |----- + %i
--R          | 2
--R          \| x
--R  2%i log(-----) + %pi

```

```

--R
--R      x
--R (6) asec(x) == -----
--R                    2
--R      Type: RewriteRule(Integer,Complex Integer,Expression Complex Integer)
--E

```

```

--S 147
ee:=asecrule dd

```

```

--R (7)
--R      +-----+
--R      | 2  2
--R      |x  - a
--R      x |-----+ %i a
--R      | 2
--R      \|  x
--R      6%i a log(-----) + 6%i a log(-----) + 3a %pi
--R                    x
--R      +-----+
--R      | 2  2
--R      - \|x  - a  + x + %i a
--R      +-----+
--R      | 2  2
--R      \|x  - a  - x + %i a
--R
-----
--R
--R      4
--R      Type: Expression Complex Integer
--E

```

```

--S 148
ff:=expandLog ee

```

```

--R (8)
--R      +-----+
--R      | 2  2
--R      - 6%i a log(\|x  - a  - x + %i a) + 6%i a log(\|x  - a  - x - %i a)
--R      +
--R      +-----+
--R      | 2  2
--R      |x  - a
--R      6%i a log(x |-----+ %i a) - 6%i a log(x) + 6%i a log(- 1) + 3a %pi
--R      | 2
--R      \|  x
--R      /
--R      4
--R
--R      Type: Expression Complex Integer
--E

```

```

--S 149
gg:=rootSimp ff

```



```

--R
--R (9)
--R          +-----+
--R          | 2    2
--R      6%i a log(\|x - a + %i a) - 6%i a log(\|x - a - x + %i a)
--R      +
--R          +-----+
--R          | 2    2
--R      6%i a log(\|x - a - x - %i a) - 6%i a log(x) + 6%i a log(- 1) + 3a %pi
--R /
--R      4
--R
--R                                          Type: Expression Complex Integer
--E

```

```

--S 150      14:236 Schaums and Axiom differ by a constant
hh:=complexNormalize gg

```

```

--R
--R      3a %pi
--R (10) -----
--R      4
--R
--R                                          Type: Expression Complex Integer
--E

```

```

)spool
)lisp (bye)

```

## References

- [1] Spiegel, Murray R. *Mathematical Handbook of Formulas and Tables*  
Schaum's Outline Series McGraw-Hill 1968 pp68-69