

\$SPAD/input schaum17.input

Timothy Daly

June 15, 2008

Contents

1	[1]:14.339	$\int \sin ax \, dx$	3
2	[1]:14.340	$\int x \sin ax \, dx$	4
3	[1]:14.341	$\int x^2 \sin ax \, dx$	5
4	[1]:14.342	$\int x^3 \sin ax \, dx$	6
5	[1]:14.343	$\int \frac{\sin ax}{x} \, dx$	7
6	[1]:14.344	$\int \frac{\sin ax}{x^2} \, dx$	7
7	[1]:14.345	$\int \frac{dx}{\sin ax}$	8
8	[1]:14.346	$\int \frac{x \, dx}{\sin ax}$	9
9	[1]:14.347	$\int \sin^2 ax \, dx$	10
10	[1]:14.348	$\int x \sin^2 ax \, dx$	11
11	[1]:14.349	$\int \sin^3 ax \, dx$	12
12	[1]:14.350	$\int \sin^4 ax \, dx$	13
13	[1]:14.351	$\int \frac{dx}{\sin^2 ax}$	14
14	[1]:14.352	$\int \frac{dx}{\sin^3 ax}$	15
15	[1]:14.353	$\int \sin px \sin qx \, dx$	17
16	[1]:14.354	$\int \frac{dx}{1 - \sin ax}$	19

17 [1]:14.355	$\int \frac{x dx}{1 - \sin ax}$	21
18 [1]:14.356	$\int \frac{dx}{1 + \sin ax}$	23
19 [1]:14.357	$\int \frac{x dx}{1 + \sin ax}$	25
20 [1]:14.358	$\int \frac{dx}{(1 - \sin ax)^2}$	27
21 [1]:14.359	$\int \frac{dx}{(1 + \sin ax)^2}$	33
22 [1]:14.360	$\int \frac{dx}{p + q \sin ax}$	39
23 [1]:14.361	$\int \frac{dx}{(p + q \sin ax)^2}$	49
24 [1]:14.362	$\int \frac{dx}{p^2 + q^2 \sin^2 ax}$	55
25 [1]:14.363	$\int \frac{dx}{p^2 - q^2 \sin^2 ax}$	64
26 [1]:14.364	$\int x^m \sin ax dx$	75
27 [1]:14.365	$\int \frac{\sin ax}{x^n} dx$	75
28 [1]:14.366	$\int \sin^n ax dx$	76
29 [1]:14.367	$\int \frac{1}{\sin^n ax} dx$	76
30 [1]:14.368	$\int \frac{x dx}{\sin^n ax}$	77

1 [1]:14.339 $\int \sin ax \, dx$

$$\int \sin ax = -\frac{\cos ax}{a}$$

<*)≡

```
)spool schaum17.output
)set message test on
)set message auto off
)clear all
```

--S 1

```
aa:=integrate(sin(a*x),x)
```

--R

--R

--R $\cos(ax)$

--R (1) $-\frac{\cos(ax)}{a}$

--R

--R

--E

Type: Union(Expression Integer,...)

--S 2

```
bb:=-cos(a*x)/a
```

--R

--R $\cos(ax)$

--R (2) $-\frac{\cos(ax)}{a}$

--R

--R

--E

Type: Expression Integer

--S 3 14:339 Schaums and Axiom agree

```
cc:=aa-bb
```

--R

--R (3) 0

--R

--E

Type: Expression Integer

2 [1]:14.340 $\int x \sin ax \, dx$

$$\int x \sin ax = \frac{\sin ax}{a^2} - \frac{x \cos ax}{a}$$

```

(*)+≡
)clear all

--S 4
aa:=integrate(x*sin(a*x),x)
--R
--R
--R      sin(a x) - a x cos(a x)
--R (1) -----
--R              2
--R             a
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E

--S 5
bb:=sin(a*x)/a^2-(x*cos(a*x))/a
--R
--R      sin(a x) - a x cos(a x)
--R (2) -----
--R              2
--R             a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

--S 6      14:340 Schaums and Axiom agree
cc:=aa-bb
--R
--R (3)  0
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```


4 [1]:14.342 $\int x^3 \sin ax \, dx$

$$\int x^3 \sin ax = \left(\frac{3x^2}{a^2} - \frac{6}{a^4} \right) \sin ax + \left(\frac{6x}{a^3} - \frac{x^3}{a} \right) \cos ax$$

```

(*)+≡
)clear all

--S 10
aa:=integrate(x^3*sin(a*x),x)
--R
--R
--R      2 2      3 3
--R      (3a x  - 6)sin(a x) + (- a x  + 6a x)cos(a x)
--R (1) -----
--R                               4
--R                              a
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E

--S 11
bb:=((3*x^2)/a^2-6/a^4)*sin(a*x)+(6*x/a^3-x^3/a)*cos(a*x)
--R
--R      2 2      3 3
--R      (3a x  - 6)sin(a x) + (- a x  + 6a x)cos(a x)
--R (2) -----
--R                               4
--R                              a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

--S 12      14:342 Schaums and Axiom agree
cc:=aa-bb
--R
--R (3)  0
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

5 [1]:14.343 $\int \frac{\sin ax}{x} dx$

$$\int \frac{\sin ax}{x} = ax - \frac{(ax)^3}{3 \cdot 3!} + \frac{(ax)^5}{5 \cdot 5!} - \dots$$

<*>+≡
)clear all

--S 13 14:343 Schaums and Axiom agree by definition

aa:=integrate(sin(x)/x,x)

--R

--R

--R (1) Si(x)

--R

Type: Union(Expression Integer,...)

--E

6 [1]:14.344 $\int \frac{\sin ax}{x^2} dx$

$$\int \frac{\sin ax}{x^2} = -\frac{\sin ax}{x} + a \int \frac{\cos ax}{x}$$

<*>+≡
)clear all

--S 14 14:344 Axiom cannot compute this integral

aa:=integrate(sin(a*x)/x^2,x)

--R

--R

--R x
--I ++ sin(%I a)
--I (1) | ----- d%I
--R ++ 2
--I %I

--R

Type: Union(Expression Integer,...)

--E

7 [1]:14.345 $\int \frac{dx}{\sin ax}$

$$\int \frac{1}{\sin ax} = \frac{1}{a} \ln(\csc ax - \cot ax) = \frac{1}{a} \ln \tan \frac{ax}{2}$$

```
(*)+=
)clear all
```

```
--S 15
aa:=integrate(1/sin(a*x),x)
```

```
--R
--R
--R      sin(a x)
--R      log(-----)
--R      cos(a x) + 1
--R (1) -----
--R      a
```

Type: Union(Expression Integer,...)

```
--E
```

```
--S 16
bb:=1/a*log(tan((a*x)/2))
```

```
--R
--R      a x
--R      log(tan(---))
--R      2
--R (2) -----
--R      a
```

Type: Expression Integer

```
--E
```

```
--S 17
cc:=aa-bb
```

```
--R
--R      a x      sin(a x)
--R      - log(tan(---)) + log(-----)
--R      2      cos(a x) + 1
--R (3) -----
--R      a
```

Type: Expression Integer

```
--E
```

```
--S 18      14:345 Schaums and Axiom agree
dd:=complexNormalize cc
```

```
--R
```

```

--R (4) 0
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

8 [1]:14.346 $\int \frac{x dx}{\sin ax}$

$$\int \frac{x}{\sin ax} = \frac{1}{a^2} \left\{ ax + \frac{(ax)^3}{18} + \frac{7(ax)^5}{1800} + \dots + \frac{2(2^{2n-1} - 1)B_n(ax)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots \right\}$$

```

(*)+≡
)clear all

```

```

--S 19      14:346 Axiom cannot compute this integral
aa:=integrate(x/sin(a*x),x)
--R
--R
--R
--R          x
--R      ++      %I
--R      (1) | ----- d%I
--R      ++      sin(%I a)
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E

```

9 [1]:14.347 $\int \sin^2 ax \, dx$

$$\int \sin^2 ax = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2ax}{4a}$$

```

(*)+≡
)clear all

--S 20
aa:=integrate(sin(a*x)^2,x)
--R
--R
--R      - cos(a x)sin(a x) + a x
--R (1) -----
--R                      2a
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E

--S 21
bb:=x/2-sin(2*a*x)/(4*a)
--R
--R      - sin(2a x) + 2a x
--R (2) -----
--R                      4a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

--S 22
cc:=aa-bb
--R
--R      sin(2a x) - 2cos(a x)sin(a x)
--R (3) -----
--R                      4a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

--S 23      14:347 Schaums and Axiom agreee
dd:=complexNormalize cc
--R
--R (4)  0
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

10 [1]:14.348 $\int x \sin^2 ax \, dx$

$$\int x \sin^2 ax = \frac{x^2}{4} - \frac{x \sin 2ax}{4a} - \frac{\cos 2ax}{8a^2}$$

```
(*)+=
)clear all
```

```
--S 24
```

```
aa:=integrate(x*sin(a*x)^2,x)
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

$$- 2a x \cos(ax) \sin(ax) - \cos^2(ax) + a x^2$$

```
--R (1) -----
```

```
--R
```

$$4a^2$$

```
--R Type: Union(Expression Integer,...)
```

```
--E
```

```
--S 25
```

```
bb:=x^2/4-(x*sin(2*a*x))/(4*a)-cos(2*a*x)/(8*a^2)
```

```
--R
```

```
--R
```

$$- 2a x \sin(2a x) - \cos(2a x) + 2a x^2$$

```
--R (2) -----
```

```
--R
```

$$8a^2$$

```
--R Type: Expression Integer
```

```
--E
```

```
--S 26
```

```
cc:=aa-bb
```

```
--R
```

```
--R
```

$$2a x \sin(2a x) - 4a x \cos(ax) \sin(ax) + \cos^2(2a x) - 2\cos^2(ax)$$

```
--R (3) -----
```

```
--R
```

$$8a^2$$

```
--R Type: Expression Integer
```

```
--E
```

```
--S 27 14:348 Schaums and Axiom differ by a constant
```

```
dd:=complexNormalize cc
```

```
--R
```

```
--R 1
```

```

--R (4) - ---
--R      2
--R     8a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

11 [1]:14.349 $\int \sin^3 ax \, dx$

$$\int \sin^3 ax = -\frac{\cos ax}{a} + \frac{\cos^3 ax}{3a}$$

```

(*)+≡
)clear all

```

```

--S 28
aa:=integrate(sin(a*x)^3,x)
--R
--R
--R      3
--R     cos(a x) - 3cos(a x)
--R (1)  -----
--R      3a
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E

```

```

--S 29
bb:=-cos(a*x)/a+cos(a*x)^3/(3*a)
--R
--R      3
--R     cos(a x) - 3cos(a x)
--R (2)  -----
--R      3a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 30      14:349 Schaums and Axiom agree
cc:=aa-bb
--R
--R (3)  0
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

12 [1]:14.350 $\int \sin^4 ax \, dx$

$$\int \sin^4 ax = \frac{3x}{8} - \frac{\sin 2ax}{4a} + \frac{\sin 4ax}{32a}$$

```

(*)+=
)clear all

--S 31
aa:=integrate(sin(a*x)^4,x)
--R
--R
--R
--R      3
--R      (2cos(a x)  - 5cos(a x))sin(a x) + 3a x
--R (1) -----
--R                                 8a
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E

--S 32
bb:=(3*x)/8-sin(2*a*x)/(4*a)+sin(4*a*x)/(32*a)
--R
--R
--R      sin(4a x) - 8sin(2a x) + 12a x
--R (2) -----
--R                                 32a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

--S 33
cc:=aa-bb
--R
--R
--R      3
--R      - sin(4a x) + 8sin(2a x) + (8cos(a x)  - 20cos(a x))sin(a x)
--R (3) -----
--R                                 32a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

--S 34      14:350 Schaums and Axiom agree
dd:=complexNormalize cc
--R
--R
--R (4)  0
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

13 [1]:14.351

$$\int \frac{dx}{\sin^2 ax}$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 ax} = -\frac{1}{a} \cot ax$$

<*)+≡
)clear all

--S 35

aa:=integrate(1/sin(a*x)^2,x)

--R

--R

--R cos(a x)

--R (1) - ----

--R a sin(a x)

--R

Type: Union(Expression Integer,...)

--E

--S 36

bb:=-1/a*cot(a*x)

--R

--R cot(a x)

--R (2) - ----

--R a

--R

Type: Expression Integer

--E

--S 37

cc:=aa-bb

--R

--R cot(a x)sin(a x) - cos(a x)

--R (3) -----

--R a sin(a x)

--R

Type: Expression Integer

--E

--S 38 14:351 Schaums and Axiom agree

dd:=complexNormalize cc

--R

--R (4) 0

--R

Type: Expression Integer

--E

14 [1]:14.352

$$\int \frac{dx}{\sin^3 ax}$$

$$\int \frac{1}{\sin^3 ax} = -\frac{\cos ax}{2a \sin^2 ax} + \frac{1}{2a} \ln \tan \frac{ax}{2}$$

<*)+=

)clear all

--S 39

aa:=integrate(1/sin(a*x)^3,x)

--R

--R

$$\frac{(\cos(ax)^2 - 1) \log\left(\frac{\sin(ax)}{\cos(ax) + 1}\right) + \cos(ax)}{2a \cos(ax)^2 - 2a}$$

(1) -----

--R

--R

--R

--R

--E

Type: Union(Expression Integer,...)

--S 40

bb:=-cos(a*x)/(2*a*sin(a*x)^2)+1/(2*a)*log(tan((a*x)/2))

--R

--R

$$\frac{\sin(ax) \log(\tan(\frac{ax}{2})) - \cos(ax)}{2a \sin(ax)^2}$$

(2) -----

--R

--R

--R

--R

--E

Type: Expression Integer

--S 41

cc:=aa-bb

--R

--R (3)

$$(-\cos(ax)^2 + 1) \sin(ax) \log(\tan(\frac{ax}{2}))$$

--R +

$$(\cos(ax)^2 - 1) \sin(ax) \log\left(\frac{\sin(ax)}{\cos(ax) + 1}\right) + \cos(ax) \sin(ax)^2 + \cos(ax)^3$$

--R +


```

--R      - cos(a x)
--R /
--R      2      2
--R      (2a cos(a x) - 2a)sin(a x)
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 42
dd:=expandLog cc
--R
--R (4)
--R      2      2      a x
--R      (- cos(a x) + 1)sin(a x) log(tan(---))
--R      2
--R +
--R      2      2
--R      (cos(a x) - 1)sin(a x) log(sin(a x))
--R +
--R      2      2      2
--R      (- cos(a x) + 1)sin(a x) log(cos(a x) + 1) + cos(a x)sin(a x)
--R +
--R      3
--R      cos(a x) - cos(a x)
--R /
--R      2      2
--R      (2a cos(a x) - 2a)sin(a x)
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 43      14:352 Schaums and Axiom agree
ee:=complexNormalize dd
--R
--R (5) 0
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

15 [1]:14.353 $\int \sin px \sin qx \, dx$

$$\int \sin px \sin qx = \frac{\sin(p-q)x}{2(p-q)} - \frac{\sin(p+q)x}{2(p+q)}$$

```

(*)+≡
)clear all

--S 44
aa:=integrate(sin(p*x)*sin(q*x),x)
--R
--R
--R      p cos(p x)sin(q x) - q cos(q x)sin(p x)
--R (1) -----
--R                2      2
--R              q  - p
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E

--S 45
bb:=sin((p-q)*x)/(2*(p-q))-sin((p+q)*x)/(2*(p+q))
--R
--R      (- q + p)sin((q + p)x) + (q + p)sin((q - p)x)
--R (2) -----
--R                2      2
--R              2q  - 2p
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

--S 46
cc:=aa-bb
--R
--R (3)
--R      (q - p)sin((q + p)x) + 2p cos(p x)sin(q x) + (- q - p)sin((q - p)x)
--R      +
--R      - 2q cos(q x)sin(p x)
--R      /
--R      2      2
--R     2q  - 2p
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

--S 47      14:353 Schams and Axiom agree
dd:=complexNormalize cc
--R
--R (4)  0

```

--R
--E

Type: Expression Integer

16 [1]:14.354 $\int \frac{dx}{1 - \sin ax}$

$$\int \frac{1}{1 - \sin ax} = \frac{1}{a} \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{ax}{2}\right)$$

```
(*)+≡
)clear all
```

```
--S 48
aa:=integrate(1/(1-sin(a*x)),x)
```

```
--R
--R
--R      - 2cos(a x) - 2
--R (1) -----
--R      a sin(a x) - a cos(a x) - a
```

Type: Union(Expression Integer,...)

```
--E
```

```
--S 49
bb:=1/a*tan(%pi/4+(a*x)/2)
```

```
--R
--R      2a x + %pi
--R      tan(-----)
--R      4
--R (2) -----
--R      a
```

Type: Expression Integer

```
--E
```

```
--S 50
cc:=aa-bb
```

```
--R
--R      2a x + %pi
--R      (- sin(a x) + cos(a x) + 1)tan(-----) - 2cos(a x) - 2
--R      4
--R (3) -----
--R      a sin(a x) - a cos(a x) - a
```

Type: Expression Integer

```
--E
```

```
--S 51 14:354 Schaums and Axiom differ by a constant
dd:=complexNormalize cc
```

```
--R
--R      1
--R (4) -
```

--R a
--R
--E

Type: Expression Integer

17 [1]:14.355 $\int \frac{x dx}{1 - \sin ax}$

$$\int \frac{x}{1 - \sin ax} = \frac{x}{a} \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{ax}{2}\right) + \frac{2}{a^2} \ln \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2}\right)$$

```

(*)+≡
)clear all

--S 52
aa:=integrate(x/(1-sin(ax)),x)
--R
--R
--R          2
--R         x
--R (1)  -----
--R      2sin(ax) - 2
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E

--S 53
bb:=x/a*tan(%pi/4+(a*x)/2)+2/a^2*log(sin(%pi/4-(a*x)/2))
--R
--R          2a x - %pi          2a x + %pi
--R      2log(- sin(-----)) + a x tan(-----)
--R                   4                   4
--R (2)  -----
--R                               2
--R                              a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

--S 54      14:355 Axiom cannot simplify this expression
cc:=aa-bb
--R
--R (3)
--R          2a x - %pi
--R      (- 4sin(ax) + 4)log(- sin(-----))
--R                                   4
--R      +
--R          2a x + %pi      2 2
--R      (- 2a x sin(ax) + 2a x)tan(-----) - a x
--R                                   4
--R /
--R      2      2
--R     2a sin(ax) - 2a

```

--R
--E

Type: Expression Integer

18 [1]:14.356 $\int \frac{dx}{1 + \sin ax}$

$$\int \frac{1}{1 + \sin ax} = -\frac{1}{a} \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2}\right)$$

```
(*)+=
)clear all
```

```
--S 55
aa:=integrate(1/(1+sin(ax)),x)
```

```
--R
--R
--R          x
--R (1)  -----
--R      sin(ax) + 1
```

Type: Union(Expression Integer,...)

```
--E
```

```
--S 56
bb:=-1/a*tan(%pi/4-(a*x)/2)
```

```
--R
--R          2a x - %pi
--R      tan(-----)
--R          4
--R (2)  -----
--R          a
```

Type: Expression Integer

```
--E
```

```
--S 57
cc:=aa-bb
```

```
--R
--R          2a x - %pi
--R      (- sin(ax) - 1)tan(-----) + a x
--R          4
--R (3)  -----
--R          a sin(ax) + a
```

Type: Expression Integer

```
--E
```

```
--S 58
tanrule:=rule(tan(a/b) == sin(a)/cos(b))
```

```
--R
--R          a      sin(a)
--R (4)  tan(-) == -----
```



```

--R          b      cos(b)
--R                                     Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
--E

--S 59      14:356 Axiom cannot simplify this expression
dd:=tanrule cc
--R
--R      (- sin(ax) - 1)sin(2a x - %pi) + a x cos(4)
--R  (5) -----
--R                a cos(4)sin(ax) + a cos(4)
--R
--R                                                     Type: Expression Integer
--E

```

19 [1]:14.357 $\int \frac{x dx}{1 + \sin ax}$

$$\int \frac{x}{1 + \sin ax} = -\frac{x}{a} \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2}\right) + \frac{2}{a^2} \ln \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{ax}{2}\right)$$

(*)+≡
)clear all

```
--S 60
aa:=integrate(x/(1+sin(a*x)),x)
--R
--R
--R (1)
--R
--R          sin(a x) + cos(a x) + 1
--R      (2sin(a x) + 2cos(a x) + 2)log(-----)
--R                                     cos(a x) + 1
--R
--R      +
--R
--R          2
--R      (- sin(a x) - cos(a x) - 1)log(-----) + a x sin(a x)
--R                                     cos(a x) + 1
--R
--R      +
--R      - a x cos(a x) - a x
--R
--R      /
--R      2      2      2
--R      a sin(a x) + a cos(a x) + a
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E
```

```
--S 61
bb:=-x/a*tan(%pi/4-(a*x)/2)+2/a^2*log(sin(%pi/4+(a*x)/2))
--R
--R
--R          2a x + %pi          2a x - %pi
--R      2log(sin(-----)) + a x tan(-----)
--R          4              4
--R (2) -----
--R          2
--R          a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E
```

```
--S 62 14:257 Axiom cannot simplify this expression
cc:=aa-bb
--R
--R (3)
--R
--R          sin(a x) + cos(a x) + 1
```

```

--R      (2sin(a x) + 2cos(a x) + 2)log(-----)
--R                                     cos(a x) + 1
--R  +
--R                                     2a x + %pi
--R      (- 2sin(a x) - 2cos(a x) - 2)log(sin(-----))
--R                                             4
--R  +
--R                                     2
--R      (- sin(a x) - cos(a x) - 1)log(-----)
--R                                     cos(a x) + 1
--R  +
--R                                     2a x - %pi
--R      (- a x sin(a x) - a x cos(a x) - a x)tan(-----) + a x sin(a x)
--R                                             4
--R  +
--R      - a x cos(a x) - a x
--R  /
--R      2      2      2
--R     a sin(a x) + a cos(a x) + a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

20 [1]:14.358 $\int \frac{dx}{(1 - \sin ax)^2}$

$$\int \frac{1}{(1 - \sin ax)^2} = \frac{1}{2a} \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{ax}{2}\right) + \frac{1}{6a} \tan^3\left(\frac{\pi}{4} + \frac{ax}{2}\right)$$

(*)+=
)clear all

--S 63

aa:=integrate(1/(1-sin(a*x))^2,x)

--R

--R

$$(1) \frac{(3\cos(ax) + 3)\sin(ax) + \cos^2(ax) - 4\cos(ax) - 5}{(3a\cos(ax) + 6a)\sin(ax) + 3a\cos^2(ax) - 3a\cos(ax) - 6a}$$

--R

--R

--R Type: Union(Expression Integer,...)

--E

--S 64

bb:=1/(2*a)*tan(%pi/4+(a*x)/2)+1/(6*a)*tan(%pi/4+(a*x)/2)^3

--R

--R

$$(2) \frac{\tan\left(\frac{2ax + \pi}{4}\right) + 3\tan^3\left(\frac{2ax + \pi}{4}\right)}{6a}$$

--R

--R

--R

Type: Expression Integer

--E

--S 65

cc:=aa-bb

--R

--R (3)

--R

$$\left((-\cos(ax) - 2)\sin(ax) - \cos^2(ax) + \cos(ax) + 2 \right) \tan\left(\frac{2ax + \pi}{4}\right)$$

--R

--R +

$$\left((-3\cos(ax) - 6)\sin(ax) - 3\cos^2(ax) + 3\cos(ax) + 6 \right) \tan\left(\frac{2ax + \pi}{4}\right)$$

--R

--R +

$$(6\cos(ax) + 6)\sin(ax) + 2\cos^2(ax) - 8\cos(ax) - 10$$

--R /

```

--R
--R      2
--R      (6a cos(a x) + 12a)sin(a x) + 6a cos(a x) - 6a cos(a x) - 12a
--R
--R      Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 66
tanrule:=rule(tan(a) == sin(a)/cos(a))
--R
--R      sin(a)
--R      (4) tan(a) == -----
--R      cos(a)
--R
--R      Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
--E

```

```

--S 67
dd:=tanrule cc
--R
--R      (5)
--R
--R      2a x + %pi 3
--R      (- cos(a x) - 2)sin(-----)
--R      4
--R
--R      +
--R      2a x + %pi 2      2a x + %pi 2      2a x + %pi
--R      (- 3cos(-----) cos(a x) - 6cos(-----) )sin(-----)
--R      4      4      4
--R
--R      +
--R      2a x + %pi 3      2a x + %pi 3
--R      6cos(-----) cos(a x) + 6cos(-----)
--R      4      4
--R
--R      *
--R      sin(a x)
--R
--R      +
--R      2      2a x + %pi 3
--R      (- cos(a x) + cos(a x) + 2)sin(-----)
--R      4
--R
--R      +
--R      2a x + %pi 2      2      2a x + %pi 2
--R      - 3cos(-----) cos(a x) + 3cos(-----) cos(a x)
--R      4      4
--R
--R      +
--R      2a x + %pi 2
--R      6cos(-----)
--R      4
--R
--R      *
--R      2a x + %pi
--R      sin(-----)

```

```

--R
--R      4
--R      +
--R      2a x + %pi 3      2      2a x + %pi 3      2a x + %pi 3
--R      2cos(-----) cos(a x) - 8cos(-----) cos(a x) - 10cos(-----)
--R      4      4      4
--R      /
--R      2a x + %pi 3      2a x + %pi 3
--R      (6a cos(-----) cos(a x) + 12a cos(-----) )sin(a x)
--R      4      4
--R      +
--R      2a x + %pi 3      2      2a x + %pi 3
--R      6a cos(-----) cos(a x) - 6a cos(-----) cos(a x)
--R      4      4
--R      +
--R      2a x + %pi 3
--R      - 12a cos(-----)
--R      4
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 68
sindiffrule2:=rule(sin((a-b)/4) == sin(a/4)*cos(b/4)-cos(a/4)*sin(b/4))
--R
--R      b - a      a      b      b      a
--R      (6) - %K sin(-----) == - %K cos(-)sin(-) + %K cos(-)sin(-)
--R      4      4      4      4      4
--R
--R                                          Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
--E

```

```

--S 69
ee:=sindiffrule2 dd
--R
--R      (7)
--R      2a x + %pi 3
--R      (- cos(a x) - 2)sin(-----)
--R      4
--R      +
--R      2a x + %pi 2      2a x + %pi 2      2a x + %pi
--R      (- 3cos(-----) cos(a x) - 6cos(-----) )sin(-----)
--R      4      4      4
--R      +
--R      2a x + %pi 3      2a x + %pi 3
--R      6cos(-----) cos(a x) + 6cos(-----)
--R      4      4
--R      *
--R      sin(a x)

```

```

--R      +
--R      2      2a x + %pi 3
--R      (- cos(a x) + cos(a x) + 2)sin(-----)
--R      4
--R      +
--R      2a x + %pi 2      2      2a x + %pi 2
--R      - 3cos(-----) cos(a x) + 3cos(-----) cos(a x)
--R      4      4
--R      +
--R      2a x + %pi 2
--R      6cos(-----)
--R      4
--R      *
--R      2a x + %pi
--R      sin(-----)
--R      4
--R      +
--R      2a x + %pi 3      2      2a x + %pi 3      2a x + %pi 3
--R      2cos(-----) cos(a x) - 8cos(-----) cos(a x) - 10cos(-----)
--R      4      4      4
--R      /
--R      2a x + %pi 3      2a x + %pi 3
--R      (6a cos(-----) cos(a x) + 12a cos(-----) )sin(a x)
--R      4      4
--R      +
--R      2a x + %pi 3      2      2a x + %pi 3
--R      6a cos(-----) cos(a x) - 6a cos(-----) cos(a x)
--R      4      4
--R      +
--R      2a x + %pi 3
--R      - 12a cos(-----)
--R      4
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 70
sincuberule:=rule(sin(a)^3 == 3/4*sin(a)-1/4*sin(3*a))

```

```

--R
--R      3      - sin(3a) + 3sin(a)
--R      (8) sin(a) == -----
--R      4
--R      Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
--E

```

```

--S 71
ff:=sincuberule ee

```

```

--R
--R (9)
--R
--R      2      6a x + 3%pi
--R      ((cos(a x) + 2)sin(a x) + cos(a x) - cos(a x) - 2)sin(-----)
--R      4
--R
--R +
--R      2a x + %pi 2      2a x + %pi 2
--R      ((- 12cos(-----) - 3)cos(a x) - 24cos(-----) - 6)
--R      4      4
--R
--R *
--R      2a x + %pi
--R      sin(-----)
--R      4
--R
--R +
--R      2a x + %pi 3      2a x + %pi 3
--R      24cos(-----) cos(a x) + 24cos(-----)
--R      4      4
--R
--R *
--R      sin(a x)
--R
--R +
--R      2a x + %pi 2      2
--R      (- 12cos(-----) - 3)cos(a x)
--R      4
--R
--R +
--R      2a x + %pi 2      2a x + %pi 2
--R      (12cos(-----) + 3)cos(a x) + 24cos(-----) + 6
--R      4      4
--R
--R *
--R      2a x + %pi
--R      sin(-----)
--R      4
--R
--R +
--R      2a x + %pi 3      2      2a x + %pi 3
--R      8cos(-----) cos(a x) - 32cos(-----) cos(a x)
--R      4      4
--R
--R +
--R      2a x + %pi 3
--R      - 40cos(-----)
--R      4
--R
--R /
--R      2a x + %pi 3      2a x + %pi 3
--R      (24a cos(-----) cos(a x) + 48a cos(-----) )sin(a x)
--R      4      4
--R
--R +
--R      2a x + %pi 3      2      2a x + %pi 3
--R      24a cos(-----) cos(a x) - 24a cos(-----) cos(a x)
--R      4      4

```



```

--R          4          4
--R      +
--R          2a x + %pi 3
--R      - 48a cos(-----)
--R                   4
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 72      14:358 Schaums and Axiom differ by a constant
complexNormalize %

```

```

--R
--R          2
--R      (10) --
--R          3a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

21 [1]:14.359 $\int \frac{dx}{(1 + \sin ax)^2}$

$$\int \frac{1}{(1 + \sin ax)^2} = -\frac{1}{2a} \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2}\right) - \frac{1}{6a} \tan^3\left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2}\right)$$

(*)+=
)clear all

--S 73

aa:=integrate(1/(1+sin(a*x))^2,x)

--R

--R

$$(1) \frac{(-3\cos(ax) - 3)\sin(ax) + \cos(ax)^2 - 4\cos(ax) - 5}{(3a\cos(ax) + 6a)\sin(ax) - 3a\cos(ax)^2 + 3a\cos(ax) + 6a}$$

--R

--R Type: Union(Expression Integer,...)

--E

--S 74

bb:=-1/(2*a)*tan(%pi/4-(a*x)/2)-1/(6*a)*tan(%pi/4-(a*x)/2)^3

--R

--R

$$(2) \frac{\tan\left(\frac{2ax - \pi}{4}\right) + 3\tan\left(\frac{2ax - \pi}{4}\right)^3}{6a}$$

--R

--R

--R

--E

Type: Expression Integer

--S 75

cc:=aa-bb

--R

--R (3)

--R

$$\begin{aligned} & ((-\cos(ax) - 2)\sin(ax) + \cos(ax)^2 - \cos(ax) - 2)\tan\left(\frac{2ax - \pi}{4}\right) \\ & + \\ & ((-3\cos(ax) - 6)\sin(ax) + 3\cos(ax)^2 - 3\cos(ax) - 6)\tan\left(\frac{2ax - \pi}{4}\right) \\ & + \\ & (-6\cos(ax) - 6)\sin(ax) + 2\cos(ax)^2 - 8\cos(ax) - 10 \end{aligned}$$

--R /

```

--R
--R      2
--R      (6a cos(a x) + 12a)sin(a x) - 6a cos(a x) + 6a cos(a x) + 12a
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 76
tanrule:=rule(tan(a) == sin(a)/cos(a))

```

```

--R
--R      sin(a)
--R      (4) tan(a) == -----
--R      cos(a)
--R
--R      Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
--E

```

```

--S 77
dd:=tanrule cc

```

```

--R
--R      (5)
--R
--R      2a x - %pi 3
--R      (- cos(a x) - 2)sin(-----)
--R      4
--R
--R      +
--R      2a x - %pi 2      2a x - %pi 2      2a x - %pi
--R      (- 3cos(-----) cos(a x) - 6cos(-----) )sin(-----)
--R      4      4      4
--R
--R      +
--R      2a x - %pi 3      2a x - %pi 3
--R      - 6cos(-----) cos(a x) - 6cos(-----)
--R      4      4
--R
--R      *
--R      sin(a x)
--R
--R      +
--R      2      2a x - %pi 3
--R      (cos(a x) - cos(a x) - 2)sin(-----)
--R      4
--R
--R      +
--R      2a x - %pi 2      2      2a x - %pi 2
--R      3cos(-----) cos(a x) - 3cos(-----) cos(a x)
--R      4      4
--R
--R      +
--R      2a x - %pi 2
--R      - 6cos(-----)
--R      4
--R
--R      *
--R      2a x - %pi
--R      sin(-----)

```

```

--R
--R      4
--R      +
--R      2a x - %pi 3      2      2a x - %pi 3      2a x - %pi 3
--R      2cos(-----) cos(a x) - 8cos(-----) cos(a x) - 10cos(-----)
--R      4      4      4
--R      /
--R      2a x - %pi 3      2a x - %pi 3
--R      (6a cos(-----) cos(a x) + 12a cos(-----) )sin(a x)
--R      4      4
--R      +
--R      2a x - %pi 3      2      2a x - %pi 3
--R      - 6a cos(-----) cos(a x) + 6a cos(-----) cos(a x)
--R      4      4
--R      +
--R      2a x - %pi 3
--R      12a cos(-----)
--R      4
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 78
sindiffrule2:=rule(sin((a-b)/4) == sin(a/4)*cos(b/4)-cos(a/4)*sin(b/4))
--R
--R
--I      b - a      a      b      b      a
--I      (6) - %U sin(-----) == - %U cos(-)sin(-) + %U cos(-)sin(-)
--I      4      4      4      4      4
--R
--R                                          Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
--E

```

```

--S 79
ee:=sindiffrule2 dd
--R
--R      (7)
--R      +-+      2a x - %pi 2      +-+      2a x - %pi 2      a x
--R      (- 3\|2 cos(-----) cos(a x) - 6\|2 cos(-----) )sin(---)
--R      4      4
--R      +
--R      2a x - %pi 3
--R      (- 2cos(a x) - 4)sin(-----)
--R      4
--R      +
--R      +-+      2a x - %pi 2      a x      2a x - %pi 3
--R      (3\|2 cos(-----) cos(---) - 12cos(-----) )cos(a x)
--R      4      2      4
--R      +

```

```

--R      +-+      2a x - %pi 2      a x      2a x - %pi 3
--R      6\|2 cos(-----) cos(---) - 12cos(-----)
--R      4      2      4
--R      *
--R      sin(a x)
--R      +
--R      +-+      2a x - %pi 2      +-+      2a x - %pi 2      a x
--R      (- 3\|2 cos(-----) cos(a x) - 6\|2 cos(-----) )sin(---)
--R      4      4      2
--R      +
--R      2      2a x - %pi 3
--R      (2cos(a x) - 2cos(a x) - 4)sin(-----)
--R      4
--R      +
--R      2a x - %pi 2      2      2a x - %pi      2a x - %pi 3      2
--R      6cos(-----) cos(a x) sin(-----) + 4cos(-----) cos(a x)
--R      4      4      4      4
--R      +
--R      +-+      2a x - %pi 2      a x      2a x - %pi 3
--R      (3\|2 cos(-----) cos(---) - 16cos(-----) )cos(a x)
--R      4      2      4
--R      +
--R      +-+      2a x - %pi 2      a x      2a x - %pi 3
--R      6\|2 cos(-----) cos(---) - 20cos(-----)
--R      4      2      4
--R      /
--R      2a x - %pi 3      2a x - %pi 3
--R      (12a cos(-----) cos(a x) + 24a cos(-----) )sin(a x)
--R      4      4
--R      +
--R      2a x - %pi 3      2      2a x - %pi 3
--R      - 12a cos(-----) cos(a x) + 12a cos(-----) cos(a x)
--R      4      4
--R      +
--R      2a x - %pi 3
--R      24a cos(-----)
--R      4
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 80
sincuberule:=rule(sin(a)^3 == 3/4*sin(a)-1/4*sin(3*a))
--R
--R      3      - sin(3a) + 3sin(a)
--R      (8) sin(a) == -----
--R      4

```

--R Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
 --E

--S 81

ff:=sincuberule ee

--R (9)

$$\begin{aligned}
 & ((\cos(ax) + 2)\sin(ax) - \cos(ax)^2 + \cos(ax) + 2)\sin\left(\frac{6ax - 3\pi}{4}\right) \\
 & + \left(-6\sqrt{2}\cos\left(\frac{2ax - \pi}{4}\right)\cos(ax) - 12\sqrt{2}\cos\left(\frac{2ax - \pi}{4}\right)\right)\sin\left(\frac{ax}{2}\right) \\
 & + (-3\cos(ax) - 6)\sin\left(\frac{2ax - \pi}{4}\right) \\
 & + \left(6\sqrt{2}\cos\left(\frac{2ax - \pi}{4}\right)\cos\left(\frac{ax}{2}\right) - 24\cos\left(\frac{2ax - \pi}{4}\right)\right)\cos(ax) \\
 & + \left(12\sqrt{2}\cos\left(\frac{2ax - \pi}{4}\right)\cos\left(\frac{ax}{2}\right) - 24\cos\left(\frac{2ax - \pi}{4}\right)\right) \\
 & * \sin(ax) \\
 & + \left(-6\sqrt{2}\cos\left(\frac{2ax - \pi}{4}\right)\cos(ax) - 12\sqrt{2}\cos\left(\frac{2ax - \pi}{4}\right)\right)\sin\left(\frac{ax}{2}\right) \\
 & + \left(\left(12\cos\left(\frac{2ax - \pi}{4}\right) + 3\right)\cos(ax) - 3\cos(ax) - 6\right)\sin\left(\frac{2ax - \pi}{4}\right) \\
 & + 8\cos\left(\frac{2ax - \pi}{4}\right)\cos(ax) \\
 & + \left(6\sqrt{2}\cos\left(\frac{2ax - \pi}{4}\right)\cos\left(\frac{ax}{2}\right) - 32\cos\left(\frac{2ax - \pi}{4}\right)\right)\cos(ax) \\
 & + \left(6\sqrt{2}\cos\left(\frac{2ax - \pi}{4}\right)\cos\left(\frac{ax}{2}\right) - 32\cos\left(\frac{2ax - \pi}{4}\right)\right)
 \end{aligned}$$

```

--R      12\|2 cos(-----) cos(---) - 40cos(-----)
--R                      4          2          4
--R /
--R      2a x - %pi 3          2a x - %pi 3
--R (24a cos(-----) cos(a x) + 48a cos(-----) )sin(a x)
--R                      4          4
--R +
--R      2a x - %pi 3          2          2a x - %pi 3
--R - 24a cos(-----) cos(a x) + 24a cos(-----) cos(a x)
--R                      4          4
--R +
--R      2a x - %pi 3
--R 48a cos(-----)
--R                      4
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 82      14:359 Schaums and Axiom differ by a constant
complexNormalize %

```

```

--R
--R      2
--R (10) - --
--R      3a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```


bb1:=2/(a*sqrt(p^2-q^2))*atan((p*tan(a*x/2)+q)/sqrt(p^2-q^2))

```

--R
--R
--R          a x
--R      p tan(---) + q
--R             2
--R      2atan(-----)
--R            +-----+
--R            | 2  2
--R            \|- q  + p
--R (2) -----
--R            +-----+
--R            | 2  2
--R      a\|- q  + p

```

Type: Expression Integer

--E

--S 85

bb2:=1/(a*sqrt(q^2-p^2))*log((p*tan((a*x)/2)+q-sqrt(q^2-p^2))/(p*tan((a*x)/2)+q+sqrt(q

```

--R
--R
--R      +-----+
--R      | 2  2      a x
--R      - \|q  - p  + p tan(---) + q
--R                          2
--R      log(-----)
--R      +-----+
--R      | 2  2      a x
--R      \|q  - p  + p tan(---) + q
--R                          2
--R (3) -----
--R      +-----+
--R      | 2  2
--R      a\|q  - p

```

Type: Expression Integer

--E

--S 86

cc1:=aa.1-bb1

```

--R
--R (4)
--R      +-----+
--R      | 2  2
--R      \|- q  + p
--R *
--R      log
--R
--R
--R      2  2      +-----+
--R      2 | 2  2

```

```

--R      (p q sin(a x) + (q - p)cos(a x) + q)\|q - p
--R      +
--R      2 3      3 2      3 2
--R      (- p q + p)sin(a x) + (- q + p q)cos(a x) - q + p q
--R      /
--R      q sin(a x) + p
--R      +
--R      +-----+      a x
--R      | 2 2      p tan(---) + q
--R      - 2\|q - p atan(-----)
--R      +-----+
--R      | 2 2
--R      \|- q + p
--R      /
--R      +-----+ +-----+
--R      | 2 2 | 2 2
--R      a\|- q + p \|q - p
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 87
cc2:=aa.2-bb1
--R
--R      (5)
--R      +-----+      a x
--R      | 2 2      p tan(---) + q
--R      (p sin(a x) + q cos(a x) + q)\|- q + p
--R      - 2atan(-----) - 2atan(-----)
--R      2 2      2 2      +-----+
--R      (q - p)cos(a x) + q - p      | 2 2
--R      \|- q + p
--R      -----
--R      +-----+
--R      | 2 2
--R      a\|- q + p
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 88
cc3:=aa.1-bb2
--R
--R      (6)
--R      log
--R      2 2      +-----+
--R      2 | 2 2

```

```

--R      (p q sin(a x) + (q - p )cos(a x) + q )\|q - p
--R      +
--R      2 3      3 2      3 2
--R      (- p q + p )sin(a x) + (- q + p q)cos(a x) - q + p q
--R      /
--R      q sin(a x) + p
--R      +
--R      +-----+
--R      | 2 2      a x
--R      - \|q - p + p tan(---) + q
--R      2
--R      - log(-----)
--R      +-----+
--R      | 2 2      a x
--R      \|q - p + p tan(---) + q
--R      2
--R      /
--R      +-----+
--R      | 2 2
--R      a\|q - p
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 89
cc4:=aa.2-bb2

```

```

--R
--R      (7)
--R      +-----+
--R      | 2 2      a x
--R      - \|q - p + p tan(---) + q
--R      2
--R      - \|- q + p log(-----)
--R      +-----+
--R      | 2 2      a x
--R      \|q - p + p tan(---) + q
--R      2
--R      +
--R      +-----+      +-----+
--R      | 2 2      (p sin(a x) + q cos(a x) + q)\|- q + p
--R      - 2\|q - p atan(-----)
--R      2 2      2 2
--R      (q - p )cos(a x) + q - p
--R      /
--R      +-----+ +-----+
--R      | 2 2 | 2 2

```



```

--S 93
ff2:=expandLog ee2
--R
--R (11)
--R      +-----+
--R      | 2 2      1      +-----+
--R      - %i\|- q + p log((p tan(- a x) + q)\|- q + p + %i q - %i p )
--R
--R      +
--R      +-----+
--R      | 2 2      1      +-----+
--R      %i\|- q + p log((p tan(- a x) + q)\|- q + p - %i q + %i p )
--R
--R      +
--R      +-----+
--R      | 2 2
--R      %i\|- q + p
--R
--R      *
--R      log
--R
--R      +-----+
--R      | 2 2
--R      (p sin(a x) + q cos(a x) + q)\|- q + p
--R
--R      +
--R      2 2      2 2
--R      (%i q - %i p )cos(a x) + %i q - %i p
--R
--R      +
--R      -
--R      +-----+
--R      | 2 2
--R      %i\|- q + p
--R
--R      *
--R      log
--R
--R      +-----+
--R      | 2 2
--R      (p sin(a x) + q cos(a x) + q)\|- q + p
--R
--R      +
--R      2 2      2 2
--R      (- %i q + %i p )cos(a x) - %i q + %i p
--R
--R      /
--R      2 2
--R      a q - a p
--R
--R                                          Type: Expression Complex Fraction Integer
--E

```

```

--S 94

```

```

gg2:=numer(ff2)/denom(ff2)
--R
--R (12)
--R      +-----+
--R      | 2 2      1      +-----+
--R      - %i\|- q + p log((p tan(- a x) + q)\|- q + p + %i q - %i p )
--R
--R      +
--R      +-----+
--R      | 2 2      1      +-----+
--R      %i\|- q + p log((p tan(- a x) + q)\|- q + p - %i q + %i p )
--R
--R      +
--R      +-----+
--R      | 2 2
--R      %i\|- q + p
--R
--R      *
--R      log
--R
--R      +-----+
--R      | 2 2
--R      (p sin(a x) + q cos(a x) + q)\|- q + p
--R
--R      +
--R      2 2      2 2      2 2
--R      (%i q - %i p )cos(a x) + %i q - %i p
--R
--R      +
--R      -
--R      +-----+
--R      | 2 2
--R      %i\|- q + p
--R
--R      *
--R      log
--R
--R      +-----+
--R      | 2 2
--R      (p sin(a x) + q cos(a x) + q)\|- q + p
--R
--R      +
--R      2 2      2 2      2 2
--R      (- %i q + %i p )cos(a x) - %i q + %i p
--R
--R      /
--R      2 2
--R      a q - a p
--RType: Fraction SparseMultivariatePolynomial(Complex Fraction Integer,Kernel Express
--E

--S 95
hh2:=gg2::Expression Complex Fraction Integer
--R

```


--E

23 [1]:14.361 $\int \frac{dx}{(p + q \sin ax)^2}$

$$\int \frac{1}{(p + q \sin ax)^2} = \frac{q \cos ax}{a(p^2 - q^2)(p + q \sin ax)} + \frac{p}{p^2 - q^2} \int \frac{1}{p + q \sin ax}$$

```

(*)+=
)clear all

--S 97
aa:=integrate(1/(p+q*sin(a*x))^2,x)
--R
--R
--R (1)
--R [
--R      2      3
--R      (p q sin(a x) + p )
--R      *
--R      log
--R
--R      +-----+
--R      2 2      2 | 2 2
--R      (p q sin(a x) + (q - p )cos(a x) + q )\|q - p
--R      +
--R      2 3      3 2      3 2
--R      (p q - p )sin(a x) + (q - p q)cos(a x) + q - p q
--R      /
--R      q sin(a x) + p
--R      +
--R      +-----+
--R      2      | 2 2
--R      (- q sin(a x) - p q cos(a x) - p q)\|q - p
--R      /
--R      +-----+
--R      3 3      2 2      4 | 2 2
--R      ((a p q - a p q)sin(a x) + a p q - a p )\|q - p
--R      ,
--R
--R      +-----+
--R      | 2 2
--R      2      3      (p sin(a x) + q cos(a x) + q)\|- q + p
--R      (2p q sin(a x) + 2p )atan(-----)
--R      2 2      2 2
--R      (q - p )cos(a x) + q - p
--R      +
--R      +-----+
--R      | 2 2

```

```

--R      (- q sin(a x) - p q cos(a x) - p q)\|- q + p
--R /
--R      +-----+
--R      3      3      2 2      4 | 2 2
--R      ((a p q - a p q)sin(a x) + a p q - a p )\|- q + p
--R ]
--R
--R                                          Type: Union(List Expression Integer,...)
--E

```

--S 98

```
t1:=integrate(1/(p+q*sin(a*x)),x)
```

```

--R
--R (2)
--R [
--R   log
--R
--R      +-----+
--R      2 2      2 | 2 2
--R      (p q sin(a x) + (q - p )cos(a x) + q )\|q - p
--R
--R      +
--R      2 3      3 2      3 2
--R      (- p q + p )sin(a x) + (- q + p q)cos(a x) - q + p q
--R
--R      /
--R      q sin(a x) + p
--R
--R /
--R      +-----+
--R      | 2 2
--R      a\|q - p
--R
--R ,
--R
--R      +-----+
--R      | 2 2
--R      (p sin(a x) + q cos(a x) + q)\|- q + p
--R
--R      2atan(-----)
--R      2 2      2 2
--R      (q - p )cos(a x) + q - p
--R
--R - -----]
--R
--R      +-----+
--R      | 2 2
--R      a\|- q + p
--R
--R                                          Type: Union(List Expression Integer,...)
--E

```

--S 99

```
bb1:=(q*cos(a*x))/(a*(p^2-q^2)*(p+q*sin(a*x)))+p/(p^2-q^2)*t1.1
```

```

--R
--R (3)
--R
--R      2

```

```

--R      (- p q sin(a x) - p )
--R      *
--R      log
--R      +-----+
--R      2 2      2 | 2 2
--R      (p q sin(a x) + (q - p )cos(a x) + q )\|q - p
--R      +
--R      2 3      3 2      3 2
--R      (- p q + p )sin(a x) + (- q + p q)cos(a x) - q + p q
--R      /
--R      q sin(a x) + p
--R      +
--R      +-----+
--R      | 2 2
--R      - q cos(a x)\|q - p
--R      /
--R      +-----+
--R      3 2      2 3 | 2 2
--R      ((a q - a p q)sin(a x) + a p q - a p )\|q - p
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

--S 100

bb2:=(q*cos(a*x))/(a*(p^2-q^2)*(p+q*sin(a*x)))+p/(p^2-q^2)*t1.2

```

--R
--R      (4)
--R      +-----+
--R      | 2 2
--R      2      (p sin(a x) + q cos(a x) + q)\|- q + p
--R      (2p q sin(a x) + 2p )atan(-----)
--R      2 2      2 2
--R      (q - p )cos(a x) + q - p
--R      +
--R      +-----+
--R      | 2 2
--R      - q cos(a x)\|- q + p
--R      /
--R      +-----+
--R      3 2      2 3 | 2 2
--R      ((a q - a p q)sin(a x) + a p q - a p )\|- q + p
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

--S 101

cc1:=aa.1-bb1

--R

```

--R (5)
--R      2
--R      p
--R      *
--R      log
--R      +-----+
--R      2 2      2 | 2 2
--R      (p q sin(a x) + (q - p )cos(a x) + q )\|q - p
--R      +
--R      2 3      3 2      3 2
--R      (p q - p )sin(a x) + (q - p q)cos(a x) + q - p q
--R      /
--R      q sin(a x) + p
--R      +
--R      2
--R      p
--R      *
--R      log
--R      +-----+
--R      2 2      2 | 2 2
--R      (p q sin(a x) + (q - p )cos(a x) + q )\|q - p
--R      +
--R      2 3      3 2      3 2
--R      (- p q + p )sin(a x) + (- q + p q)cos(a x) - q + p q
--R      /
--R      q sin(a x) + p
--R      +
--R      +-----+
--R      | 2 2
--R      - q\|q - p
--R      /
--R      +-----+
--R      2 3 | 2 2
--R      (a p q - a p )\|q - p
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 102
cc2:=aa.2-bb1

```

```

--R (6)
--R      +-----+
--R      2 | 2 2
--R      p \|- q + p
--R      *
--R      log

```



```

--R      2 | 2      2      (p sin(a x) + q cos(a x) + q)\|- q + p
--R      - 2p \|q - p atan(-----)
--R                                  2      2      2      2
--R                                  (q - p )cos(a x) + q - p
--R      +
--R      +-----+ +-----+
--R      | 2      2 | 2      2
--R      - q\|- q + p \|q - p
--R      /
--R      +-----+ +-----+
--R      2      3 | 2      2 | 2      2
--R      (a p q - a p )\|- q + p \|q - p
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 104      14:361 Schaums and Axiom differ by a constant
cc4:=aa.2-bb2

```

```

--R
--R
--R      q
--R      (8)  -----
--R      2      3
--R      a p q - a p
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

24 [1]:14.362 $\int \frac{dx}{p^2 + q^2 \sin^2 ax}$

$$\int \frac{1}{p^2 + q^2 \sin^2 ax} = \frac{1}{ap\sqrt{p^2 + q^2}} \tan^{-1} \frac{\sqrt{p^2 + q^2} \tan ax}{p}$$

```

(*)+≡
)clear all

--S 105
aa:=integrate(1/(p^2+q^2*sin(a*x)^2),x)
--R
--R (1)
--R
--R          +-----+
--R          | 2  2
--R          p sin(a x)\|q  + p
--R      atan(-----)
--R          2  2      2  2
--R      (2q  + 2p )cos(a x) + 2q  + 2p
--R      +
--R          2  2      2  2
--R      ((2q  + p )cos(a x) + 2q  + 2p )sin(a x)
--R      atan(-----)
--R          +-----+
--R          2  2      | 2  2
--R      (p cos(a x)  + 2p cos(a x) + p)\|q  + p
--R      /
--R          +-----+
--R          | 2  2
--R      a p\|q  + p
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E

--S 106
bb:=1/(a*p*sqrt(p^2+q^2))*atan((sqrt(p^2+q^2)*tan(a*x))/p)
--R
--R          +-----+
--R          | 2  2
--R          tan(a x)\|q  + p
--R      atan(-----)
--R          p
--R (2) -----
--R          +-----+
--R          | 2  2
--R          a p\|q  + p

```


--R Type: Expression Integer
--E

--S 107
cc:=aa-bb

--R (3)

$$\begin{aligned}
 & - \operatorname{atan}\left(\frac{\tan(ax)\sqrt{q^2+p}}{p}\right) + \operatorname{atan}\left(\frac{p \sin(ax)\sqrt{q^2+p}}{(2q^2+2p)\cos(ax) + 2q^2+2p}\right) \\
 & + \operatorname{atan}\left(\frac{((2q^2+p)\cos(ax) + 2q^2+2p)\sin(ax)}{(p\cos^2(ax) + 2p\cos(ax) + p)\sqrt{q^2+p}}\right) \\
 & / \\
 & a p \sqrt{q^2+p}
 \end{aligned}$$

--R Type: Expression Integer
--E

--S 108
dd:=ratDenom cc

--R (4)

$$\begin{aligned}
 & - \sqrt{q^2+p} \operatorname{atan}\left(\frac{\tan(ax)\sqrt{q^2+p}}{p}\right) \\
 & + \sqrt{q^2+p} \operatorname{atan}\left(\frac{((2q^2+p)\cos(ax) + 2q^2+2p)\sin(ax)\sqrt{q^2+p}}{(p^2q^2+p^3)\cos(ax) + (2p^2q+2p^3)\cos(ax) + p^2q+p^3}\right) \\
 & + \sqrt{q^2+p}
 \end{aligned}$$

```

--R      | 2 2      p sin(a x)\|q  + p
--R      \|q  + p atan(-----)
--R                        2 2      2 2
--R                      (2q  + 2p )cos(a x) + 2q  + 2p
--R /
--R      2 3
--R    a p q  + a p
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 109
atanrule:=rule(atan(x) == -%i/2*log((1+%i*x)/(1-%i*x)))
--R
--R      - x + %i
--R      %i log(-----)
--R              x + %i
--R (5) atan(x) == - -----
--R                    2
--R
--R      Type: RewriteRule(Integer,Complex Integer,Expression Complex Integer)
--E

```

```

--S 110
ee:=atanrule dd
--R
--R (6)
--R -
--R      +-----+
--R      | 2 2
--R      %i\|q  + p
--R *
--R      log
--R
--R      +-----+
--R      | 2 2      2 2      2
--R      - p sin(a x)\|q  + p  + (2%i q  + 2%i p )cos(a x) + 2%i q
--R +
--R      2
--R      2%i p
--R /
--R      +-----+
--R      | 2 2      2 2      2
--R      p sin(a x)\|q  + p  + (2%i q  + 2%i p )cos(a x) + 2%i q
--R +
--R      2
--R      2%i p
--R +
--R -

```

```

--R          +-----+
--R          | 2  2
--R      %i\|q  + p
--R      *
--R      log
--R
--R          +-----+
--R          2  2          2  2          | 2  2
--R      ((- 2q  - p )cos(a x) - 2q  - 2p )sin(a x)\|q  + p
--R      +
--R          2  3          2  2          3
--R      (%i p q  + %i p )cos(a x)  + (2%i p q  + 2%i p )cos(a x)
--R      +
--R          2  3
--R      %i p q  + %i p
--R      /
--R
--R          +-----+
--R          2  2          2  2          | 2  2
--R      ((2q  + p )cos(a x) + 2q  + 2p )sin(a x)\|q  + p
--R      +
--R          2  3          2  2          3
--R      (%i p q  + %i p )cos(a x)  + (2%i p q  + 2%i p )cos(a x)
--R      +
--R          2  3
--R      %i p q  + %i p
--R      +
--R          +-----+
--R          | 2  2
--R      %i\|q  + p  log(-----)
--R
--R          +-----+
--R          | 2  2
--R          tan(a x)\|q  + p  + %i p
--R      /
--R          2  3
--R      2a p q  + 2a p
--R
--R                                          Type: Expression Complex Integer
--E

```

```

--S 111
ff:=expandLog ee

```

```

--R      (7)
--R          +-----+          +-----+
--R          | 2  2          | 2  2
--R      - %i\|q  + p  log(tan(a x)\|q  + p  + %i p)
--R      +

```

```

--R      +-----+      +-----+
--R      | 2  2      | 2  2
--R      %i\|q  + p  log(tan(a x)\|q  + p  - %i p)
--R  +
--R      +-----+
--R      | 2  2
--R      %i\|q  + p
--R  *
--R      log
--R      +-----+
--R      2  2      2  2      | 2  2
--R      ((2q  + p )cos(a x) + 2q  + 2p )sin(a x)\|q  + p
--R  +
--R      2  3      2  2      3
--R      (%i p q  + %i p )cos(a x)  + (2%i p q  + 2%i p )cos(a x) + %i p q
--R  +
--R      3
--R      %i p
--R  +
--R  -
--R      +-----+
--R      | 2  2
--R      %i\|q  + p
--R  *
--R      log
--R      +-----+
--R      2  2      2  2      | 2  2
--R      ((2q  + p )cos(a x) + 2q  + 2p )sin(a x)\|q  + p
--R  +
--R      2  3      2  2      3
--R      (- %i p q  - %i p )cos(a x)  + (- 2%i p q  - 2%i p )cos(a x)
--R  +
--R      2  3
--R      - %i p q  - %i p
--R  +
--R      +-----+
--R      | 2  2
--R      %i\|q  + p
--R  *
--R      +-----+
--R      | 2  2      2  2      2  2      2  2
--R      log(p sin(a x)\|q  + p  + (2%i q  + 2%i p )cos(a x) + 2%i q  + 2%i p )
--R  +
--R  -
--R      +-----+
--R      | 2  2

```

```

--R      %i\|q  + p
--R      *
--R      log
--R      +-----+
--R      | 2  2
--R      p sin(a x)\|q  + p  + (- 2%i q  - 2%i p )cos(a x) - 2%i q
--R      +
--R      2
--R      - 2%i p
--R      +
--R      +-----+
--R      | 2  2
--R      - %i log(- 1)\|q  + p
--R      /
--R      2      3
--R      2a p q  + 2a p
--R
--R                                          Type: Expression Complex Integer
--E

```

```

--S 112
tanrule2:RewriteRule(INT,COMPLEX(INT),EXPR(COMPLEX(INT))):=rule(tan(a) == sin(a)/cos(a)
--R
--R      sin(a)
--R      (8) tan(a) == -----
--R      cos(a)
--R      Type: RewriteRule(Integer,Complex Integer,Expression Complex Integer)
--E

```

```

--S 113
gg:=tanrule2 ff
--R
--R      (9)
--R      +-----+
--R      | 2  2
--R      %i\|q  + p
--R      *
--R      log
--R      +-----+
--R      2      2      2      2      | 2  2
--R      ((2q  + p )cos(a x) + 2q  + 2p )sin(a x)\|q  + p
--R      +
--R      2      3      2      2      3
--R      (%i p q  + %i p )cos(a x)  + (2%i p q  + 2%i p )cos(a x) + %i p q
--R      +
--R      3
--R      %i p

```

$$\begin{aligned}
& + \\
& - \\
& \quad +-----+ \\
& \quad | 2 \quad 2 \\
& \quad \%i\|q^2 + p^2 \\
& * \\
& \quad \log \\
& \quad \quad +-----+ \\
& \quad \quad | 2 \quad 2 \\
& \quad \quad ((2q^2 + p^2)\cos(ax) + 2q^2 + 2p^2)\sin(ax)\|q^2 + p^2 \\
& \quad + \\
& \quad \quad 2 \quad 3 \quad 2 \quad 2 \quad 3 \\
& \quad \quad (- \%i p q^2 - \%i p^3)\cos(ax) + (- 2%i p q^2 - 2%i p^3)\cos(ax) \\
& \quad + \\
& \quad \quad 2 \quad 3 \\
& \quad \quad - \%i p q^2 - \%i p^3 \\
& + \\
& \quad +-----+ \\
& \quad | 2 \quad 2 \\
& \quad \%i\|q^2 + p^2 \\
& * \\
& \quad +-----+ \\
& \quad | 2 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \\
& \quad \log(p \sin(ax)\|q^2 + p^2 + (2%i q^2 + 2%i p^2)\cos(ax) + 2%i q^2 + 2%i p^2) \\
& + \\
& - \\
& \quad +-----+ \\
& \quad | 2 \quad 2 \\
& \quad \%i\|q^2 + p^2 \\
& * \\
& \quad \log \\
& \quad \quad +-----+ \\
& \quad \quad | 2 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \\
& \quad \quad p \sin(ax)\|q^2 + p^2 + (- 2%i q^2 - 2%i p^2)\cos(ax) - 2%i q^2 \\
& \quad + \\
& \quad \quad 2 \\
& \quad \quad - 2%i p^2 \\
& + \\
& \quad +-----+ \quad +-----+ \\
& \quad | 2 \quad 2 \quad \sin(ax)\|q^2 + p^2 + \%i p^2 \cos(ax) \\
& - \%i\|q^2 + p^2 \log(\frac{\quad}{\cos(ax)}) \\
& + \\
& \quad +-----+ \quad +-----+ \\
& \quad | 2 \quad 2 \quad \quad \quad \quad +-----+
\end{aligned}$$

```

--R      | 2 2      sin(a x)\|q + p - %i p cos(a x)      | 2 2
--R      %i\|q + p log(-----) - %i log(- 1)\|q + p
--R                                  cos(a x)
--R /
--R      2      3
--R      2a p q + 2a p
--R
--R                                          Type: Expression Complex Integer
--E

```

--S 114

hh:=expandLog gg

```

--R
--R      (10)
--R      +-----+
--R      | 2 2
--R      %i\|q + p
--R      *
--R      log
--R
--R      +-----+
--R      2 2      2 2      | 2 2
--R      ((2q + p )cos(a x) + 2q + 2p )sin(a x)\|q + p
--R      +
--R      2      3      2      2      3      2
--R      (%i p q + %i p )cos(a x) + (2%i p q + 2%i p )cos(a x) + %i p q
--R      +
--R      3
--R      %i p
--R      +
--R      -
--R      +-----+
--R      | 2 2
--R      %i\|q + p
--R      *
--R      log
--R
--R      +-----+
--R      2 2      2 2      | 2 2
--R      ((2q + p )cos(a x) + 2q + 2p )sin(a x)\|q + p
--R      +
--R      2      3      2      2      3
--R      (- %i p q - %i p )cos(a x) + (- 2%i p q - 2%i p )cos(a x)
--R      +
--R      2      3
--R      - %i p q - %i p
--R      +
--R      +-----+
--R      | 2 2

```

```

--R      %i\|q  + p
--R      *
--R      +-----+
--R      | 2  2
--R      log(p sin(a x)\|q  + p  + (2%i q  + 2%i p )cos(a x) + 2%i q  + 2%i p )
--R      +
--R      -
--R      +-----+
--R      | 2  2
--R      %i\|q  + p
--R      *
--R      log
--R      +-----+
--R      | 2  2
--R      p sin(a x)\|q  + p  + (- 2%i q  - 2%i p )cos(a x) - 2%i q
--R      +
--R      2
--R      - 2%i p
--R      +
--R      +-----+      +-----+
--R      | 2  2      | 2  2
--R      - %i\|q  + p log(sin(a x)\|q  + p  + %i p cos(a x))
--R      +
--R      +-----+      +-----+      +-----+
--R      | 2  2      | 2  2      | 2  2
--R      %i\|q  + p log(sin(a x)\|q  + p  - %i p cos(a x)) - %i log(- 1)\|q  + p
--R      /
--R      2      3
--R      2a p q  + 2a p
--R
--R                                          Type: Expression Complex Integer
--E

```

--S 115 14:362 Schaums and Axiom differ by a constant

ii:=complexNormalize hh

```

--R
--R      +-----+
--R      | 2  2
--R      (%i log(%i) - %i log(- %i) - %i log(- 1))\|q  + p
--R      (11) -----
--R      2      3
--R      2a p q  + 2a p
--R
--R                                          Type: Expression Complex Integer
--E

```


25 [1]:14.363 $\int \frac{dx}{p^2 - q^2 \sin^2 ax}$

$$\int \frac{1}{p^2 - q^2 \sin^2 ax} = \begin{cases} \frac{1}{ap\sqrt{p^2 - q^2}} \tan^{-1} \frac{\sqrt{p^2 - q^2} \tan ax}{p} \\ \frac{1}{2ap\sqrt{q^2 - p^2}} \ln \left(\frac{\sqrt{q^2 - p^2} \tan ax + p}{\sqrt{q^2 - p^2} \tan ax - p} \right) \end{cases}$$

(*)+=
)clear all

--S 116

aa:=integrate(1/(p^2-q^2*sin(a*x)^2),x)

--R

--R (1)

--R [

--R log

--R +-----+

--R 2 2 2 2 2 | 2 2
--R ((- q + 2p)cos(a x) + q - p)\|q - p

--R +

--R 2 3
--R (2p q - 2p)cos(a x)sin(a x)

--R /

--R 2 2 2 2
--R q cos(a x) - q + p

--R /

--R +-----+

--R | 2 2

--R 2a p\|q - p

--R ,

--R

--R +-----+

--R | 2 2
--R p sin(a x)\|- q + p

--R - atan(-----)

--R 2 2 2 2
--R (2q - 2p)cos(a x) + 2q - 2p

--R +

--R 2 2 2 2
--R ((2q - p)cos(a x) + 2q - 2p)sin(a x)

--R - atan(-----)

--R +-----+

--R 2 | 2 2

```

--R          (p cos(a x) + 2p cos(a x) + p)\|- q + p
--R /
--R          +-----+
--R          | 2 2
--R          a p\|- q + p
--R ]
--R
--R                                          Type: Union(List Expression Integer,...)
--E

```

```

--S 117
bb1:=1/(a*p*sqrt(p^2-q^2))*atan((sqrt(p^2-q^2)*tan(a*x))/p)
--R
--R          +-----+
--R          | 2 2
--R          tan(a x)\|- q + p
--R          atan(-----)
--R          p
--R (2) -----
--R          +-----+
--R          | 2 2
--R          a p\|- q + p
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 118
bb2:=1/(2*a*p*sqrt(q^2-p^2))*log((sqrt(q^2-p^2)*tan(a*x)+p)/(sqrt(q^2-p^2)*tan(a*x)-p))
--R
--R          +-----+
--R          | 2 2
--R          tan(a x)\|q - p + p
--R          log(-----)
--R          +-----+
--R          | 2 2
--R          tan(a x)\|q - p - p
--R (3) -----
--R          +-----+
--R          | 2 2
--R          2a p\|q - p
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 119
cc1:=aa.1-bb1
--R
--R (4)
--R          +-----+

```

```

--R      | 2 2
--R     \|- q + p
--R   *
--R     log
--R                                     +-----+
--R      2 2      2 2      2 2      2 | 2 2
--R     ((- q + 2p )cos(a x) + q - p )\|q - p
--R   +
--R      2 3
--R     (2p q - 2p )cos(a x)sin(a x)
--R   /
--R      2 2      2 2      2 2
--R     q cos(a x) - q + p
--R +
--R                                     +-----+
--R      +-----+      | 2 2
--R     | 2 2      tan(a x)\|- q + p
--R   - 2\|q - p atan(-----)
--R                                     p
--R /
--R      +-----+ +-----+
--R     | 2 2      | 2 2
--R   2a p\|- q + p \|q - p
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 120
cc2:=aa.2-bb1

```

```

--R (5)
--R                                     +-----+
--R      | 2 2
--R     tan(a x)\|- q + p
--R   - atan(-----) - atan(-----)
--R                                     p
--R                                     2 2      2 2
--R                                     (2q - 2p )cos(a x) + 2q - 2p
--R +
--R      2 2      2 2
--R     ((2q - p )cos(a x) + 2q - 2p )sin(a x)
--R   - atan(-----)
--R                                     +-----+
--R      2      | 2 2
--R     (p cos(a x) + 2p cos(a x) + p)\|- q + p
--R /
--R      +-----+
--R     | 2 2

```

```

--R      a p\|- q + p
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 121
cc3:=aa.1-bb2

```

```

--R
--R      (6)
--R
--R          +-----+
--R          | 2    2
--R      tan(a x)\|q - p  + p
--R      - log(-----)
--R          +-----+
--R          | 2    2
--R      tan(a x)\|q - p  - p
--R
--R      +
--R      log
--R
--R          +-----+
--R          2    2      2    2      2    2 | 2    2
--R      ((- q  + 2p )cos(a x) + q - p )\|q - p
--R
--R      +
--R          2    3
--R      (2p q - 2p )cos(a x)sin(a x)
--R
--R      /
--R          2    2      2    2
--R      q cos(a x) - q + p
--R
--R      /
--R          +-----+
--R          | 2    2
--R      2a p\|q - p
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 122
cc4:=aa.2-bb2

```

```

--R
--R      (7)
--R
--R          +-----+
--R          | 2    2
--R      tan(a x)\|q - p  + p
--R      - \|- q + p log(-----)
--R          +-----+
--R          | 2    2
--R      tan(a x)\|q - p  - p
--R
--R      +
--R
--R          +-----+

```

```

--R          +-----+
--R          | 2 2          | 2 2
--R          - 2\|q - p atan(-----)
--R                               2 2          2 2
--R                               (2q - 2p)cos(a x) + 2q - 2p
--R
--R +
--R          +-----+
--R          | 2 2          2 2          2 2
--R          - 2\|q - p atan(-----)
--R                               ((2q - p)cos(a x) + 2q - 2p)sin(a x)
--R
--R                               +-----+
--R                               | 2 2
--R                               (p cos(a x) + 2p cos(a x) + p)\|- q + p
--R /
--R          +-----+ +-----+
--R          | 2 2 | 2 2
--R          2a p\|- q + p \|q - p
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 123
tanrule:=rule(tan(a) == sin(a)/cos(a))
--R
--R          sin(a)
--R (8) tan(a) == -----
--R          cos(a)
--R
--R          Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
--E

```

```

--S 124
dd2:=tanrule cc2
--R
--R (9)
--R          +-----+
--R          | 2 2
--R          sin(a x)\|- q + p
--R - atan(-----) - atan(-----)
--R          p cos(a x)          2 2          2 2
--R                               (2q - 2p)cos(a x) + 2q - 2p
--R
--R +
--R          2 2          2 2
--R          ((2q - p)cos(a x) + 2q - 2p)sin(a x)
--R - atan(-----)
--R
--R          +-----+
--R          | 2 2
--R          (p cos(a x) + 2p cos(a x) + p)\|- q + p
--R /

```

```

--R      +-----+
--R      | 2 2
--R      a p\|- q + p
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 125
ee2:=ratDenom dd2

```

```

--R (10)
--R -
--R      +-----+
--R      | 2 2
--R      \|- q + p
--R
--R      *
--R
--R      +-----+
--R      2 2      2 2      | 2 2
--R      ((2q - p )cos(a x) + 2q - 2p )sin(a x)\|- q + p
--R      atan(-----)
--R      2 3      2 2      3      2 3
--R      (p q - p )cos(a x) + (2p q - 2p )cos(a x) + p q - p
--R
--R      +
--R      +-----+
--R      | 2 2      sin(a x)\|- q + p
--R      \|- q + p atan(-----)
--R      p cos(a x)
--R
--R      +
--R      +-----+
--R      | 2 2      p sin(a x)\|- q + p
--R      \|- q + p atan(-----)
--R      2 2      2 2
--R      (2q - 2p )cos(a x) + 2q - 2p
--R
--R      /
--R      2 3
--R      a p q - a p
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 126
atanrule:=rule(atan(x) == -%i/2*log((1+%i*x)/(1-%i*x)))

```

```

--R
--R      - x + %i
--R      %i log(-----)
--R      x + %i

```

```

--R (11) atan(x) == - -----
--R                                     2
--R      Type: RewriteRule(Integer,Complex Integer,Expression Complex Integer)
--E

```

```

--S 127
ff2:=atanrule ee2

```

```

--R (12)
--R -
--R      +-----+
--R      | 2 2
--R      %i\|- q + p
--R      *
--R      log
--R
--R      +-----+
--R      | 2 2      2      2
--R      - p sin(a x)\|- q + p + (2%i q - 2%i p )cos(a x) + 2%i q
--R      +
--R      2
--R      - 2%i p
--R      /
--R
--R      +-----+
--R      | 2 2      2      2
--R      p sin(a x)\|- q + p + (2%i q - 2%i p )cos(a x) + 2%i q
--R      +
--R      2
--R      - 2%i p
--R      +
--R
--R      +-----+
--R      | 2 2      2      2
--R      - sin(a x)\|- q + p + %i p cos(a x)
--R      - %i\|- q + p log(-----)
--R
--R      +-----+
--R      | 2 2
--R      sin(a x)\|- q + p + %i p cos(a x)
--R      +
--R
--R      +-----+
--R      | 2 2
--R      %i\|- q + p
--R      *
--R      log
--R
--R      +-----+
--R      2      2      2      2      | 2 2
--R      ((- 2q + p )cos(a x) - 2q + 2p )sin(a x)\|- q + p
--R      +

```

```

--R          2      3      2      2      3
--R      (%i p q - %i p )cos(a x) + (2%i p q - 2%i p )cos(a x)
--R      +
--R          2      3
--R      %i p q - %i p
--R      /
--R          +-----+
--R          2      2      2      2      | 2      2
--R      ((2q - p )cos(a x) + 2q - 2p )sin(a x)\|- q + p
--R      +
--R          2      3      2      2      3
--R      (%i p q - %i p )cos(a x) + (2%i p q - 2%i p )cos(a x)
--R      +
--R          2      3
--R      %i p q - %i p
--R      /
--R      2      3
--R      2a p q - 2a p
--R
--R                                          Type: Expression Complex Integer
--E

```

--S 128

gg2:=expandLog ff2

```

--R
--R      (13)
--R      -
--R          +-----+
--R          | 2      2
--R      %i\|- q + p
--R      *
--R      log
--R          +-----+
--R          2      2      2      2      | 2      2
--R      ((2q - p )cos(a x) + 2q - 2p )sin(a x)\|- q + p
--R      +
--R          2      3      2      2      3
--R      (%i p q - %i p )cos(a x) + (2%i p q - 2%i p )cos(a x)
--R      +
--R          2      3
--R      %i p q - %i p
--R      +
--R          +-----+
--R          | 2      2
--R      %i\|- q + p
--R      *
--R      log

```


--E

--S 129

rootrule4a:RewriteRule(INT,COMPLEX(INT),EXPR(COMPLEX(INT))):=rule(sqrt(p^2-q^2)==sqrt(q

--R

$$\sqrt{-q^2 + p^2} = \sqrt{-q + p} \sqrt{q + p}$$

Type: RewriteRule(Integer,Complex Integer,Expression Complex Integer)

--E

--S 130

hh2:=rootrule4a gg2

--R

--R (15)

--R -

$$\begin{aligned} & \sqrt{-q^2 + p^2} \sqrt{q + p} \\ & * \log \left(\frac{((2q^2 - p^2)\cos(ax) + 2q^2 - 2p^2)\sin(ax)\sqrt{-q^2 + p^2}\sqrt{q + p} + (i p q^2 - i p^3)\cos(ax) + (2i p q^2 - 2i p^3)\cos(ax)}{i p q^2 - i p^3} \right) \\ & + \sqrt{-q^2 + p^2} \sqrt{q + p} \\ & * \log \left(\frac{((2q^2 - p^2)\cos(ax) + 2q^2 - 2p^2)\sin(ax)\sqrt{-q^2 + p^2}\sqrt{q + p} + (-i p q^2 + i p^3)\cos(ax) + (-2i p q^2 + 2i p^3)\cos(ax)}{-i p q^2 + i p^3} \right) \\ & + \sqrt{-q^2 + p^2} \sqrt{q + p} \\ & * \log \end{aligned}$$

```

--R          +-----+ +-----+          2      2          2
--R      p sin(a x)\|- q + p \|q + p  + (2%i q  - 2%i p )cos(a x) + 2%i q
--R      +
--R          2
--R      - 2%i p
--R  +
--R      -
--R          +-----+ +-----+
--R      %i\|- q + p \|q + p
--R  *
--R      log
--R          +-----+ +-----+          2      2
--R      p sin(a x)\|- q + p \|q + p  + (- 2%i q  + 2%i p )cos(a x)
--R      +
--R          2      2
--R      - 2%i q  + 2%i p
--R  +
--R      +-----+ +-----+          +-----+ +-----+
--R      %i\|- q + p \|q + p log(sin(a x)\|- q + p \|q + p  + %i p cos(a x))
--R  +
--R      +-----+ +-----+          +-----+ +-----+
--R      - %i\|- q + p \|q + p log(sin(a x)\|- q + p \|q + p  - %i p cos(a x))
--R  +
--R          +-----+ +-----+
--R      - %i log(- 1)\|- q + p \|q + p
--R  /
--R          2      3
--R      2a p q  - 2a p
--R
--R                                          Type: Expression Complex Integer
--E

```

```

--S 131      14:363 Schaums and Axiom differ by a constant
ii2:=complexNormalize hh2

```

```

--R
--R          +-----+ +-----+
--R      (%i log(%i) - %i log(- %i) - %i log(- 1))\|- q + p \|q + p
--R  (16) -----
--R          2      3
--R      2a p q  - 2a p
--R
--R                                          Type: Expression Complex Integer
--E

```

26 [1]:14.364 $\int x^m \sin ax \, dx$

$$\int x^m \sin ax = -\frac{x^m \cos ax}{a} + \frac{mx^{m-1} \sin ax}{a^2} - \frac{m(m-1)}{a^2} \int x^{m-2} \sin ax$$

`<*>+≡
)clear all`

--S 132 14:364 Axiom cannot compute this integral

aa:=integrate(x^m*sin(a*x),x)

--R

--R

--R

--R (1) $\int x^m \sin(a x) dx$

--R

--R

--E

Type: Union(Expression Integer,...)

27 [1]:14.365 $\int \frac{\sin ax}{x^n} \, dx$

$$\int \frac{\sin ax}{x^n} = -\frac{\sin ax}{(n-1)x^{n-1}} + \frac{a}{n-1} \int \frac{\cos ax}{x^{n-1}}$$

`<*>+≡
)clear all`

--S 133 14:365 Axiom cannot compute this integral

aa:=integrate(sin(a*x)/x^n,x)

--R

--R

--R

--R (1) $\int \frac{\sin(a x)}{x^n} dx$

--R

--R

--E

Type: Union(Expression Integer,...)

28 [1]:14.366 $\int \sin^n ax \, dx$

$$\int \sin^n ax = -\frac{\sin^{n-1} ax \cos ax}{an} + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} ax$$

<*)+≡

)clear all

--S 134 14:366 Axiom cannot compute this integral

aa:=integrate(sin(a*x)^n,x)

--R

--R

--R

--R (1) $\int \sin^n(ax) \, dx$

--R

--R

--E

Type: Union(Expression Integer,...)

29 [1]:14.367 $\int \frac{1}{\sin^n ax} \, dx$

$$\int \frac{1}{\sin^n ax} = \frac{-\cos ax}{a(n-1)\sin^{n-1} ax} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{1}{\sin^{n-2} ax}$$

<*)+≡

)clear all

--S 135 14:367 Axiom cannot compute this integral

aa:=integrate(1/(sin(a*x))^n,x)

--R

--R

--R

--R (1) $\int \frac{1}{\sin^n(ax)} \, dx$

--R

--R

--E

Type: Union(Expression Integer,...)

30 [1]:14.368 $\int \frac{x dx}{\sin^n ax}$

$$\int \frac{x}{\sin^n ax} = \frac{-x \cos ax}{a(n-1) \sin^{n-1} ax} - \frac{1}{a^2(n-1)(n-2) \sin^{n-2} ax} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{x}{\sin^{n-2} ax}$$

<*)+≡

)clear all

--S 136 14:368 Axiom cannot compute this integral

aa:=integrate(x/sin(a*x)^n,x)

--R

--R

--R

--I

--R

--I

--R

--R

--E

--R

)spool

)lisp (bye)

$$(1) \int \frac{x}{\sin^n(ax)} dx$$

Type: Union(Expression Integer,...)

References

- [1] Spiegel, Murray R. *Mathematical Handbook of Formulas and Tables*
Schaum's Outline Series McGraw-Hill 1968 pp75-76