

\$SPAD/input schaum27.input

Timothy Daly

June 15, 2008

Contents

1	[1]:14.540	$\int \sinh ax \, dx$	3
2	[1]:14.541	$\int x \sinh ax \, dx$	4
3	[1]:14.542	$\int x^2 \sinh ax \, dx$	5
4	[1]:14.543	$\int \frac{\sinh ax}{x} \, dx$	6
5	[1]:14.544	$\int \frac{\sinh ax}{x^2} \, dx$	6
6	[1]:14.545	$\int \frac{dx}{\sinh ax} \, dx$	7
7	[1]:14.546	$\int \frac{x \, dx}{\sinh ax} \, dx$	8
8	[1]:14.547	$\int \sinh^2 ax \, dx$	9
9	[1]:14.548	$\int x \sinh^2 ax \, dx$	10
10	[1]:14.549	$\int \frac{dx}{\sinh^2 ax} \, dx$	13
11	[1]:14.550	$\int \sinh ax \sinh px \, dx$	17
12	[1]:14.551	$\int \sinh ax \sin px \, dx$	19
13	[1]:14.552	$\int \sinh ax \cos px \, dx$	21
14	[1]:14.553	$\int \frac{dx}{p + q \sinh ax} \, dx$	23
15	[1]:14.554	$\int \frac{dx}{(p + q \sinh ax)^2} \, dx$	26
16	[1]:14.555	$\int \frac{dx}{p^2 + q^2 \sinh^2 ax}$	30

17 [1]:14.556	$\int \frac{dx}{p^2 - q^2 \sinh^2 ax} dx$	36
18 [1]:14.557	$\int x^m \sinh ax dx$	40
19 [1]:14.558	$\int \sinh^n dx$	40
20 [1]:14.559	$\int \frac{\sinh ax}{x^n} dx$	41
21 [1]:14.560	$\int \frac{dx}{\sinh^n ax} dx$	41
22 [1]:14.561	$\int \frac{x dx}{\sinh^n ax} dx$	42

1 [1]:14.540 $\int \sinh ax \, dx$

$$\int \sinh ax = \frac{\cosh ax}{a}$$

```
(*)≡
)spool schaum27.output
)set message test on
)set message auto off
)clear all

--S 1
aa:=integrate(sinh(a*x),x)
--R
--R      cosh(a x)
--R (1)  -----
--R      a
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E

--S 2
bb:=cosh(a*x)/a
--R
--R      cosh(a x)
--R (2)  -----
--R      a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

--S 3      14:540 Schaums and Axiom agree
cc:=aa-bb
--R
--R (3)  0
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E
```

2 [1]:14.541 $\int x \sinh ax \, dx$

$$\int x \sinh ax = \frac{x * \cosh ax}{a} - \frac{\sinh ax}{a^2}$$

(*)+≡
)clear all

--S 4

aa:=integrate(x*sinh(a*x),x)

--R

--R

--R - sinh(a x) + a x cosh(a x)

--R (1) -----

--R 2

--R a

--R

Type: Union(Expression Integer,...)

--E

--S 5

bb:=(x*cosh(a*x))/a-sinh(a*x)/a^2

--R

--R - sinh(a x) + a x cosh(a x)

--R (2) -----

--R 2

--R a

--R

Type: Expression Integer

--E

--S 6 14:541 Schaums and Axiom agree

cc:=aa-bb

--R

--R (3) 0

--R

Type: Expression Integer

--E

3 [1]:14.542 $\int x^2 \sinh ax \, dx$

$$\int x^2 \sinh ax = \left(\frac{x^2}{a} + \frac{2}{a^3} \right) \cosh ax - \frac{2x}{a^2} \sinh ax$$

```

(*)+≡
)clear all

--S 7
aa:=integrate(x^2*sinh(a*x),x)
--R
--R
--R
--R              2 2
--R      - 2a x sinh(a x) + (a x  + 2)cosh(a x)
--R (1) -----
--R              3
--R             a
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E

--S 8
bb:=(x^2/a+2/a^3)*cosh(a*x)-(2*x)/a^2*sinh(a*x)
--R
--R
--R              2 2
--R      - 2a x sinh(a x) + (a x  + 2)cosh(a x)
--R (2) -----
--R              3
--R             a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

--S 9      14:542 Schaums and Axiom agree
cc:=aa-bb
--R
--R
--R (3)  0
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```


6 [1]:14.545 $\int \frac{dx}{\sinh ax} dx$

$$\int \frac{1}{\sinh ax} = \frac{1}{a} \ln \tanh \frac{ax}{2}$$

```

(*)+≡
)clear all

--S 12
aa:=integrate(1/sinh(a*x),x)
--R
--R
--R      - log(sinh(a x) + cosh(a x) + 1) + log(sinh(a x) + cosh(a x) - 1)
--R (1) -----
--R                                                     a
--R                                         Type: Union(Expression Integer,...)
--E

--S 13
bb:=1/a*log(tanh(a*x)/2)
--R
--R      tanh(a x)
--R      log(-----)
--R             2
--R (2) -----
--R            a
--R
--R                                         Type: Expression Integer
--E

--S 14      14:545 Axiom cannot simplify this expression
cc:=aa-bb
--R
--R (3)
--R      tanh(a x)
--R      - log(-----) - log(sinh(a x) + cosh(a x) + 1)
--R             2
--R      +
--R      log(sinh(a x) + cosh(a x) - 1)
--R /
--R      a
--R
--R                                         Type: Expression Integer
--E

```


7 [1]:14.546 $\int \frac{x dx}{\sinh ax}$

$$\int \frac{x}{\sinh ax} = \frac{1}{a^2} \left\{ ax - \frac{(ax)^3}{18} + \frac{7(ax)^5}{1800} - \dots + \frac{2(-1)^n (2^{2n-1}) B_n (ax)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots \right\}$$

<*)+≡

)clear all

--S 15 14:546 Axiom cannot compute this integral

aa:=integrate(x/sinh(a*x),x)

--R

--R

--R

--I

--I

--I

--R

--R

--E

--E

--E

--E

--E

--E

--E

--E

--E

--E

--E

--E

--E

--E

--E

--E

--E

--E

--E

--E

--E

--E

--E

--E

--E

--E

--E

--E

--E

--E

--E

--E

--E

--E

--E

--E

--E

--E

--E

--E

--E

--E

Type: Union(Expression Integer,...)

8 [1]:14.547 $\int \sinh^2 ax \, dx$

$$\int \sinh^2 ax = \frac{\sinh ax \cosh ax}{2a} - \frac{x}{2}$$

```
(*)+=
)clear all
```

```
--S 16
```

```
aa:=integrate(sinh(a*x)^2,x)
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R      cosh(a x)sinh(a x) - a x
```

```
--R (1) -----
```

```
--R      2a
```

```
--R
```

Type: Union(Expression Integer,...)

```
--E
```

```
--S 17
```

```
bb:=(sinh(a*x)*cosh(a*x))/(2*a)-x/2
```

```
--R
```

```
--R      cosh(a x)sinh(a x) - a x
```

```
--R (2) -----
```

```
--R      2a
```

```
--R
```

Type: Expression Integer

```
--E
```

```
--S 18      14:547 Schaums and Axiom agree
```

```
cc:=aa-bb
```

```
--R
```

```
--R (3) 0
```

```
--R
```

Type: Expression Integer

```
--E
```

9 [1]:14.548 $\int x \sinh^2 ax \, dx$

$$\int x \sinh^2 ax = \frac{x * \sinh 2ax}{4a} - \frac{\cosh 2ax}{8a^2} - \frac{x^2}{4}$$

```

(*)+≡
)clear all

--S 19
aa:=integrate(x*sinh(a*x)^2,x)
--R
--R
--R
--R      2
--R      - sinh(a x) + 4a x cosh(a x)sinh(a x) - cosh(a x) - 2a x
--R (1) -----
--R
--R      2
--R      8a
--R
--R      Type: Union(Expression Integer,...)
--E

--S 20
bb:=(x*sinh(2*a*x))/(4*a)-cosh(2*a*x)/(8*a^2)-x^2/4
--R
--R
--R      2 2
--R      2a x sinh(2a x) - cosh(2a x) - 2a x
--R (2) -----
--R
--R      2
--R      8a
--R
--R      Type: Expression Integer
--E

--S 21
cc:=aa-bb
--R
--R
--R (3)
--R
--R      2
--R      - 2a x sinh(2a x) - sinh(a x) + 4a x cosh(a x)sinh(a x) + cosh(2a x)
--R +
--R      2
--R      - cosh(a x)
--R /
--R      2
--R      8a
--R
--R      Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 22
sinhsqrrule:=rule(sinh(x)^2 == 1/2*cosh(2*x)-1/2)
--R
--R          2    cosh(2x) - 1
--R (4)  sinh(x) == -----
--R                    2
--R                                     Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
--E

```

```

--S 23
dd:=sinhsqrrule cc
--R
--R (5)
--R
--R          2
--R - 4a x sinh(2a x) + 8a x cosh(a x)sinh(a x) + cosh(2a x) - 2cosh(a x) + 1
--R -----
--R                                     2
--R                                  16a
--R                                     Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 24
coshsqrrule:=rule(cosh(x)^2 == 1/2*cosh(2*x)+1/2)
--R
--R          2    cosh(2x) + 1
--R (6)  cosh(x) == -----
--R                    2
--R                                     Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
--E

```

```

--S 25
ee:=coshsqrrule dd
--R
--R          - x sinh(2a x) + 2x cosh(a x)sinh(a x)
--R (7) -----
--R                    4a
--R                                     Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 26
sinhcoshrule:=rule(sinh(x)*cosh(y) == 1/2*(sinh(x+y)+sinh(x-y)))
--R
--R          %K sinh(y + x) - %K sinh(y - x)
--R (8)  %K cosh(y)sinh(x) == -----
--R                    2
--R                                     Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)

```

--E

--S 27 14:548 Schaums and Axiom agree

ff:=sinhcoshrule ee

--R

--R (9) 0

--R

Type: Expression Integer

--E

10 [1]:14.549 $\int \frac{dx}{\sinh^2 ax} dx$
 $\int \frac{1}{\sinh^2 ax} = -\frac{\coth ax}{a}$

```
(*)+=
)clear all
```

```
--S 28
aa:=integrate(1/sinh(a*x)^2,x)
--R
--R
--R
--R (1) -----
--R                2
--R      a sinh(a x)  + 2a cosh(a x)sinh(a x) + a cosh(a x)  - a
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E
```

```
--S 29
bb:=-coth(a*x)/a
--R
--R      coth(a x)
--R (2) -----
--R          a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E
```

```
--S 30
cc:=aa-bb
--R
--R (3)
--R      coth(a x)sinh(a x)  + 2cosh(a x)coth(a x)sinh(a x)
--R +
--R      (cosh(a x)  - 1)coth(a x) - 2
--R /
--R      a sinh(a x)  + 2a cosh(a x)sinh(a x) + a cosh(a x)  - a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E
```

```
--S 31
sinhsqrrule:=rule(sinh(x)^2 == 1/2*cosh(2*x)-1/2)
```

```

--R
--R      2      cosh(2x) - 1
--R (4)  sinh(x) == -----
--R                      2
--R                                     Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
--E

```

```

--S 32
dd:=sinhsqrrule cc
--R
--R (5)
--R
--R      2
--R 4cosh(a x)coth(a x)sinh(a x) + (cosh(2a x) + 2cosh(a x) - 3)coth(a x) - 4
--R -----
--R
--R      2
--R 4a cosh(a x)sinh(a x) + a cosh(2a x) + 2a cosh(a x) - 3a
--R                                     Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 33
coshsqrrule:=rule(cosh(x)^2 == 1/2*cosh(2*x)+1/2)
--R
--R      2      cosh(2x) + 1
--R (6)  cosh(x) == -----
--R                      2
--R                                     Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
--E

```

```

--S 34
ee:=coshsqrrule dd
--R
--R      2cosh(a x)coth(a x)sinh(a x) + (cosh(2a x) - 1)coth(a x) - 2
--R (7) -----
--R
--R      2a cosh(a x)sinh(a x) + a cosh(2a x) - a
--R                                     Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 35
sinhcoshrule:=rule(sinh(x)*cosh(y) == 1/2*(sinh(x+y)+sinh(x-y)))
--I
--I      %B sinh(y + x) - %B sinh(y - x)
--I (8)  %B cosh(y)sinh(x) == -----
--R                      2
--R                                     Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
--E

```

```

--S 36

```

```

ff:=sinhcoshrule ee
--R
--R      coth(a x)sinh(2a x) + (cosh(2a x) - 1)coth(a x) - 2
--R (9) -----
--R      a sinh(2a x) + a cosh(2a x) - a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 37
cothrule:=rule(coth(x) == cosh(x)/sinh(x))
--R
--R      cosh(x)
--R (10) coth(x) == -----
--R      sinh(x)
--R
--R                                          Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
--E

```

```

--S 38
gg:=cothrule ff
--R
--R      cosh(a x)sinh(2a x) - 2sinh(a x) + cosh(a x)cosh(2a x) - cosh(a x)
--R (11) -----
--R      a sinh(a x)sinh(2a x) + (a cosh(2a x) - a)sinh(a x)
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 39
hh:=sinhcoshrule gg
--R
--R      sinh(3a x) - 3sinh(a x) + 2cosh(a x)cosh(2a x) - 2cosh(a x)
--R (12) -----
--R      a sinh(3a x) + 2a sinh(a x)sinh(2a x) - 3a sinh(a x)
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 40
sinhsinhrule:=rule(sinh(x)*sinh(y)==1/2*(cosh(x+y)-cosh(x-y)))
--R
--R      %M cosh(y + x) - %M cosh(y - x)
--R (13) %M sinh(x)sinh(y) == -----
--R      2
--R
--R                                          Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
--E

```

```

--S 41
ii:=sinhsinhrule gg

```



```

--R
--R      2cosh(a x)sinh(2a x) - 4sinh(a x) + 2cosh(a x)cosh(2a x) - 2cosh(a x)
--R (14) -----
--R      (2a cosh(2a x) - 2a)sinh(a x) + a cosh(3a x) - a cosh(a x)
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 42
coshcoshrule:=rule(cosh(x)*cosh(y)==1/2*(cosh(x+y)+cosh(x-y)))
--R
--R      %N cosh(y + x) + %N cosh(y - x)
--I (15) %N cosh(x)cosh(y) == -----
--R      2
--R      Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
--E

```

```

--S 43
jj:=coshcoshrule ii
--R
--R      2cosh(a x)sinh(2a x) - 4sinh(a x) + cosh(3a x) - cosh(a x)
--R (16) -----
--R      (2a cosh(2a x) - 2a)sinh(a x) + a cosh(3a x) - a cosh(a x)
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 44      14:549 Schaums and Axiom differ by a constant
kk:=sinhcoshrule jj
--R
--R      1
--R (17) -
--R      a
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

11 [1]:14.550 $\int \sinh ax \sinh px \, dx$

$$\int \sinh ax \sinh px = \frac{\sinh(a+p)x}{2(a+p)} - \frac{\sinh(a-p)x}{2(a-p)}$$

```

(*)+≡
)clear all

--S 45
aa:=integrate(sinh(a*x)*sinh(p*x),x)
--R
--R
--R      a cosh(a x)sinh(p x) - p cosh(p x)sinh(a x)
--R (1) -----
--R      2      2      2      2      2      2
--R      (p - a )sinh(a x) + (- p + a )cosh(a x)
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E

--S 46
bb:=(sinh(a+p)*x)/(2*(a+p))-(sinh(a-p)*x)/(2*(a-p))
--R
--R      (p - a)x sinh(p + a) + (- p - a)x sinh(p - a)
--R (2) -----
--R      2      2
--R      2p - 2a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

--S 47      14:550 Axiom cannot simplify this expression
cc:=aa-bb
--R
--R (3)
--R      2a cosh(a x)sinh(p x)
--R      +
--R      ((- p + a)x sinh(p + a) + (p + a)x sinh(p - a))sinh(a x)
--R      +
--R      - 2p cosh(p x)sinh(a x) + (p - a)x cosh(a x) sinh(p + a)
--R      +
--R      (- p - a)x cosh(a x) sinh(p - a)
--R      /
--R      2      2      2      2      2      2
--R      (2p - 2a )sinh(a x) + (- 2p + 2a )cosh(a x)

```

--R
--E

Type: Expression Integer

12 [1]:14.551 $\int \sinh ax \sin px \, dx$

$$\int \sinh ax \sin px = \frac{a \cosh ax \sin px - p \sinh ax \cos px}{a^2 + p^2}$$

```

(*)+≡
)clear all

--S 48
aa:=integrate(sinh(a*x)*sin(p*x),x)
--R
--R
--R (1)
--R
--R      2
--R      (a sin(p x) - p cos(p x))sinh(a x)
--R      +
--R      (2a cosh(a x)sin(p x) - 2p cos(p x)cosh(a x))sinh(a x)
--R      +
--R      2
--R      (a cosh(a x) + a)sin(p x) - p cos(p x)cosh(a x) + p cos(p x)
--R      /
--R      2 2
--R      (2p + 2a )sinh(a x) + (2p + 2a )cosh(a x)
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E

--S 49
bb:=(a*cosh(a*x)*sin(p*x)-p*sinh(a*x)*cos(p*x))/(a^2+p^2)
--R
--R
--R      - p cos(p x)sinh(a x) + a cosh(a x)sin(p x)
--R (2) -----
--R
--R      2 2
--R      p + a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

--S 50
cc:=aa-bb
--R
--R
--R (3)
--R
--R      2
--R      (a sin(p x) + p cos(p x))sinh(a x) + (- a cosh(a x) + a)sin(p x)
--R      +
--R      2
--R      - p cos(p x)cosh(a x) + p cos(p x)
--R      /

```

```

--R      2      2      2      2
--R      (2p + 2a )sinh(a x) + (2p + 2a )cosh(a x)
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 51
sinhsqrrule:=rule(sinh(x)^2 == 1/2*cosh(2*x)-1/2)
--R
--R      2      cosh(2x) - 1
--R      (4)  sinh(x) == -----
--R                      2
--R
--R                                          Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
--E

```

```

--S 52
dd:=sinhsqrrule cc
--R
--R      (5)
--R
--R      2
--R      (a cosh(2a x) - 2a cosh(a x) + a)sin(p x) + p cos(p x)cosh(2a x)
--R      +
--R      2
--R      - 2p cos(p x)cosh(a x) + p cos(p x)
--R      /
--R      2      2      2      2
--R      (4p + 4a )sinh(a x) + (4p + 4a )cosh(a x)
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 53
coshsqrrule:=rule(cosh(x)^2 == 1/2*cosh(2*x)+1/2)
--R
--R      2      cosh(2x) + 1
--R      (6)  cosh(x) == -----
--R                      2
--R
--R                                          Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
--E

```

```

--S 54      14:551 Schaums and Axiom agree
ee:=coshsqrrule dd
--R
--R      (7)  0
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

13 [1]:14.552 $\int \sinh ax \cos px \, dx$

$$\int \sinh ax \cos px = \frac{a \cosh ax \cos px + p \sinh ax \sin px}{a^2 + p^2}$$

`<*>+≡
)clear all`

`--S 55`

`aa:=integrate(sinh(a*x)*cos(p*x),x)`

`--R`

`--R`

`--R (1)`

$$\begin{aligned} & (p \sin(p x) + a \cos(p x)) \sinh(a x)^2 \\ & + (2p \cosh(a x) \sin(p x) + 2a \cos(p x) \cosh(a x)) \sinh(a x) \\ & + (p \cosh(a x)^2 - p) \sin(p x) + a \cos(p x) \cosh(a x)^2 + a \cos(p x) \end{aligned}$$

`--R /`

$$(2p^2 + 2a^2) \sinh(a x) + (2p^2 + 2a^2) \cosh(a x)$$

`--R`

Type: Union(Expression Integer,...)

`--E`

`--S 56`

`bb:=(a*cosh(a*x)*cos(p*x)+p*sinh(a*x)*sin(p*x))/(a^2+p^2)`

`--R`

$$(2) \frac{p \sin(p x) \sinh(a x) + a \cos(p x) \cosh(a x)}{p^2 + a^2}$$

`--R`

`--R`

`--R`

`--R`

Type: Expression Integer

`--E`

`--S 57`

`cc:=aa-bb`

`--R`

`--R (3)`

$$\begin{aligned} & (-p \sin(p x) + a \cos(p x)) \sinh(a x)^2 + (p \cosh(a x)^2 - p) \sin(p x) \\ & + (-a \cos(p x) \cosh(a x)^2 + a \cos(p x)) \end{aligned}$$

`--R /`

```

--R      2      2      2      2
--R      (2p + 2a )sinh(a x) + (2p + 2a )cosh(a x)
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 58
sinhsqrrule:=rule(sinh(x)^2 == 1/2*cosh(2*x)-1/2)
--R
--R      2      cosh(2x) - 1
--R      (4)  sinh(x) == -----
--R                      2
--R
--R                                          Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
--E

```

```

--S 59
dd:=sinhsqrrule cc
--R
--R      (5)
--R
--R      2
--R      (- p cosh(2a x) + 2p cosh(a x) - p)sin(p x) + a cos(p x)cosh(2a x)
--R      +
--R      2
--R      - 2a cos(p x)cosh(a x) + a cos(p x)
--R      /
--R      2      2      2      2
--R      (4p + 4a )sinh(a x) + (4p + 4a )cosh(a x)
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 60
coshsqrrule:=rule(cosh(x)^2 == 1/2*cosh(2*x)+1/2)
--R
--R      2      cosh(2x) + 1
--R      (6)  cosh(x) == -----
--R                      2
--R
--R                                          Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
--E

```

```

--S 61      14:552 Schaums and Axiom agree
ee:=coshsqrrule dd
--R
--R      (7)  0
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

14 [1]:14.553 $\int \frac{dx}{p + q \sinh ax} dx$

$$\int \frac{1}{p + q \sinh ax} = \frac{1}{a\sqrt{p^2 + q^2}} \ln \left(\frac{qe^{ax} + p - \sqrt{p^2 + q^2}}{qe^{ax} + p + \sqrt{p^2 + q^2}} \right)$$

```

(*)+=
)clear all

--S 62
aa:=integrate(1/(p+q*sinh(a*x)),x)
--R
--R
--R (1)
--R log
--R      2      2      2      2      2
--R      q sinh(a x) + (2q cosh(a x) + 2p q)sinh(a x) + q cosh(a x)
--R      +
--R      2      2
--R      2p q cosh(a x) + q + 2p
--R      *
--R      +-----+
--R      | 2      2
--R      \|q + p
--R      +
--R      3      2      3      2      2      3
--R      (- 2q - 2p q)sinh(a x) + (- 2q - 2p q)cosh(a x) - 2p q - 2p
--R      /
--R      2      2
--R      q sinh(a x) + (2q cosh(a x) + 2p)sinh(a x) + q cosh(a x)
--R      +
--R      2p cosh(a x) - q
--R      /
--R      +-----+
--R      | 2      2
--R      a\|q + p
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E

--S 63
bb:=1/(a*sqrt(p^2+q^2))*log((q*e^(a*x)+p-sqrt(p^2+q^2))/(q*e^(a*x)+p+sqrt(p^2+q^2)))
--R
--R
--R      +-----+
--R      | 2      2      a x
--R      - \|q + p + q %e + p

```



```

--R      log(-----)
--R      +-----+
--R      | 2    2      a x
--R      \|q  + p  + q %e  + p
--R (2) -----
--R      +-----+
--R      | 2    2
--R      a\|q  + p
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 64      14:553 Axiom cannot simplify this expression
cc:=aa-bb

```

```

--R      (3)
--R      log
--R      2      2      2      2      2
--R      q sinh(a x) + (2q cosh(a x) + 2p q)sinh(a x) + q cosh(a x)
--R      +
--R      2      2
--R      2p q cosh(a x) + q  + 2p
--R      *
--R      +-----+
--R      | 2    2
--R      \|q  + p
--R      +
--R      3      2      3      2      2      3
--R      (- 2q  - 2p q)sinh(a x) + (- 2q  - 2p q)cosh(a x) - 2p q  - 2p
--R      /
--R      2      2
--R      q sinh(a x) + (2q cosh(a x) + 2p)sinh(a x) + q cosh(a x)
--R      +
--R      2p cosh(a x) - q
--R      +
--R      +-----+
--R      | 2    2      a x
--R      - \|q  + p  + q %e  + p
--R      - log(-----)
--R      +-----+
--R      | 2    2      a x
--R      \|q  + p  + q %e  + p
--R      /
--R      +-----+
--R      | 2    2
--R      a\|q  + p
--R
--R                                          Type: Expression Integer

```

--E

15 [1]:14.554 $\int \frac{dx}{(p + q \sinh ax)^2} dx$

$$\int \frac{1}{(p + q \sinh ax)^2} = \frac{-q \cosh ax}{a(p^2 + q^2)(p + q \sinh ax)} + \frac{p}{p^2 + q^2} \int \frac{1}{p + q \sinh ax}$$

(*)+=

)clear all

--S 65

aa:=integrate(1/(p*q*sinh(a*x))^2,x)

--R

--R

--R (1)

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--S 66

t1:=integrate(1/(p+q*sinh(a*x)),x)

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

```

--R      a\|q  + p
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E

--S 67
bb:=(-q*cosh(a*x))/(a*(p^2+q^2)*(p+q*sinh(a*x)))+p/(p^2+q^2)*t1
--R
--R      (3)
--R
--R
--R
--R      (p q sinh(a x) + p )
--R
--R      *
--R      log
--R
--R
--R      2      2      2      2      2
--R      q sinh(a x) + (2q cosh(a x) + 2p q)sinh(a x) + q cosh(a x)
--R
--R      +
--R
--R      2      2
--R      2p q cosh(a x) + q + 2p
--R
--R      *
--R
--R      +-----+
--R      | 2      2
--R      \|q  + p
--R
--R      +
--R
--R      3      2      3      2      2      3
--R      (- 2q - 2p q)sinh(a x) + (- 2q - 2p q)cosh(a x) - 2p q - 2p
--R
--R      /
--R
--R      2      2
--R      q sinh(a x) + (2q cosh(a x) + 2p)sinh(a x) + q cosh(a x)
--R
--R      +
--R      2p cosh(a x) - q
--R
--R      +
--R
--R      +-----+
--R      | 2      2
--R      - q cosh(a x)\|q  + p
--R
--R      /
--R
--R
--R      +-----+
--R      3      2      2      3 | 2      2
--R      ((a q + a p q)sinh(a x) + a p q + a p )\|q  + p
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 68      14:554 Axiom cannot simplify this expression
cc:=aa-bb
--R

```

```

--R      (4)
--R
--R      3 3      3      3 3      4 2      2
--R      - p q sinh(a x) + (- 2p q cosh(a x) - p q )sinh(a x)

```

$$\begin{aligned}
& + \\
& (- p^3 q \cosh^3(a x) - 2 p^2 q \cosh^2(a x) + p^3 q) \sinh(a x) - p^4 q \cosh^2(a x) \\
& + \\
& p^4 q \\
& * \\
& \log \\
& \frac{q^2 \sinh^2(a x) + (2q \cosh^2(a x) + 2p q) \sinh(a x) + q^2 \cosh^2(a x)}{2p q \cosh^2(a x) + q^2 + 2p} \\
& * \\
& \frac{\sqrt{q^2 + p}}{(- 2q^3 - 2p q^2) \sinh(a x) + (- 2q^3 - 2p q^2) \cosh(a x) - 2p q^2 - 2p^3} \\
& / \\
& \frac{q^2 \sinh^2(a x) + (2q \cosh^2(a x) + 2p) \sinh(a x) + q^2 \cosh^2(a x)}{2p \cosh(a x) - q} \\
& + \\
& \frac{p^2 q \cosh^3(a x) \sinh(a x) + (2p^2 q \cosh^2(a x) - 2q^3 - 2p q) \sinh^2(a x)}{p^2 q \cosh^3(a x) - p^3 q \cosh^2(a x) - 2p^2 q - 2p^3} \\
& * \\
& \frac{\sqrt{q^2 + p}}{(a^2 p q + a^4 p q) \sinh(a x)} \\
& + \\
& ((2a^2 p q + 2a^4 p q) \cosh(a x) + a^3 p q + a^5 p q) \sinh(a x) \\
& + \\
& (a^2 p q + a^4 p q) \cosh(a x) + (2a^3 p q + 2a^5 p q) \cosh(a x) - a^2 p q \\
& + \\
& a^4 q
\end{aligned}$$

```

--R      - a p q
--R      *
--R      sinh(a x)
--R      +
--R      3 4      5 2      2      3 4      5 2
--R      (a p q + a p q )cosh(a x) - a p q - a p q
--R      *
--R      +-----+
--R      | 2      2
--R      \|q + p
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

16 [1]:14.555 $\int \frac{dx}{p^2 + q^2 \sinh^2 ax}$

$$\int \frac{1}{p^2 + q^2 \sinh^2 ax} = \begin{cases} \frac{1}{ap\sqrt{q^2 - p^2}} \tan^{-1} \frac{\sqrt{q^2 - p^2} \tanh ax}{p} \\ \frac{1}{2ap\sqrt{p^2 - q^2}} \ln \left(\frac{p + \sqrt{p^2 - q^2} \tanh ax}{p - \sqrt{p^2 - q^2} \tanh ax} \right) \end{cases}$$

(*)+=
)clear all

--S 69

aa:=integrate(1/(p^2+q^2*sinh(a*x)^2),x)

--R

--R

--R (1)

--R [

--R log

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

```

--R      (6q cosh(a x) - 2q + 4p )sinh(a x)
--R      +
--R      2      3      2      2      2      4
--R      (4q cosh(a x) + (- 4q + 8p )cosh(a x))sinh(a x) + q cosh(a x)
--R      +
--R      2      2      2      2
--R      (- 2q + 4p )cosh(a x) + q
--R      /
--R      +-----+
--R      | 2      2
--R      2a p\|- q + p
--R      ,
--R      atan
--R      2      2      2      2      2      2      2      2
--R      (q sinh(a x) + 2q cosh(a x)sinh(a x) + q cosh(a x) - q + 2p )
--R      *
--R      +-----+
--R      | 2      2
--R      \|q - p
--R      /
--R      2      3
--R      2p q - 2p
--R      /
--R      +-----+
--R      | 2      2
--R      a p\|q - p
--R      ]
--R
--R                                          Type: Union(List Expression Integer,...)
--E

```

```

--S 70
bb1:=1/(a*p*sqrt(q^2-p^2))*atan((sqrt(q^2-p^2)*tanh(a*x))/p)

```

```

--R
--R      +-----+
--R      | 2      2
--R      tanh(a x)\|q - p
--R      atan(-----)
--R      p
--R      (2) -----
--R      +-----+
--R      | 2      2
--R      a p\|q - p
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```


--S 71

bb2:=1/(2*a*p*sqrt(p^2-q^2))*log((p+sqrt(p^2-q^2)*tanh(a*x))/(p-sqrt(p^2-q^2)*tanh(a*x))

--R

$$(3) \frac{\log\left(\frac{-\tanh(ax)\sqrt{-q^2+p^2}-p}{\tanh(ax)\sqrt{-q^2+p^2}-p}\right)}{2ap\sqrt{-q^2+p^2}}$$

Type: Expression Integer

--E

--S 72

cc1:=aa.1-bb1

--R

--R (4)

$$\sqrt{q^2-p^2} \log\left(\frac{q^4 \sinh^4(ax) + 4q^4 \cosh^3(ax) \sinh(ax) + (6q^4 \cosh^2(ax) - 2q^4 + 4p^2 q^2) \sinh^2(ax) + (4q^4 \cosh^3(ax) + (-4q^4 + 8p^2 q^2) \cosh^2(ax)) \sinh(ax) + q^4 \cosh^4(ax) + (-2q^4 + 4p^2 q^2) \cosh^2(ax) + q^4 - 8p^2 q^2 + 8p^4}{(4p^4 q^4 - 4p^3 q^3) \sinh^3(ax) + (8p^4 q^4 - 8p^3 q^3) \cosh^3(ax) \sinh(ax)}\right) + \sqrt{-q^2+p^2}$$

```

--R      (4p q - 4p q )cosh(a x) - 4p q + 12p q - 8p
--R      /
--R      2      4      2      3
--R      q sinh(a x) + 4q cosh(a x)sinh(a x)
--R      +
--R      2      2      2      2      2
--R      (6q cosh(a x) - 2q + 4p )sinh(a x)
--R      +
--R      2      3      2      2      2      4
--R      (4q cosh(a x) + (- 4q + 8p )cosh(a x))sinh(a x) + q cosh(a x)
--R      +
--R      2      2      2      2
--R      (- 2q + 4p )cosh(a x) + q
--R      +
--R      +-----+ +-----+
--R      | 2 2      tanh(a x)\|q - p
--R      - 2\|- q + p atan(-----)
--R      p
--R      /
--R      +-----+ +-----+
--R      | 2 2 | 2 2
--R      2a p\|- q + p \|q - p
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 73
cc2:=aa.2-bb1
--R
--R      (5)
--R      +-----+
--R      | 2 2
--R      tanh(a x)\|q - p
--R      - atan(-----)
--R      p
--R      +
--R      atan
--R      2      2      2      2      2      2      2      2
--R      (q sinh(a x) + 2q cosh(a x)sinh(a x) + q cosh(a x) - q + 2p )
--R      *
--R      +-----+
--R      | 2 2
--R      \|q - p
--R      /
--R      2      3
--R      2p q - 2p

```

```

--R /
--R      +-----+
--R      | 2  2
--R      a p\|q  - p
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 74
cc3:=aa.2-bb1
--R
--R      (6)
--R
--R      +-----+
--R      | 2  2
--R      tanh(a x)\|q  - p
--R      - atan(-----)
--R      p
--R
--R      +
--R      atan
--R
--R      2      2      2      2      2      2      2      2
--R      (q sinh(a x)  + 2q cosh(a x)sinh(a x) + q cosh(a x)  - q  + 2p )
--R
--R      *
--R
--R      +-----+
--R      | 2  2
--R      \|q  - p
--R
--R      /
--R
--R      2      3
--R      2p q  - 2p
--R
--R      /
--R      +-----+
--R      | 2  2
--R      a p\|q  - p
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 75      14:555 Axiom cannot simplify this expression
cc4:=aa.2-bb2
--R
--R      (7)
--R
--R      +-----+
--R      | 2  2      +-----+
--R      | 2  2      - tanh(a x)\|- q  + p  - p
--R      - \|q  - p  log(-----)
--R      +-----+
--R      | 2  2
--R      tanh(a x)\|- q  + p  - p
--R
--R      +

```

```

--R          +-----+
--R          | 2 2
--R      2\|- q + p
--R      *
--R      atan
--R          2      2      2      2      2      2      2      2
--R      (q sinh(a x) + 2q cosh(a x)sinh(a x) + q cosh(a x) - q + 2p )
--R      *
--R          +-----+
--R          | 2 2
--R          \|q - p
--R      /
--R          2      3
--R      2p q - 2p
--R /
--R          +-----+ +-----+
--R          | 2 2 | 2 2
--R      2a p\|- q + p \|q - p
--R
--E

```

Type: Expression Integer

17 [1]:14.556 $\int \frac{dx}{p^2 - q^2 \sinh^2 ax}$

$$\int \frac{1}{p^2 - q^2 \sinh^2 ax} = \frac{1}{2ap\sqrt{p^2 + q^2}} \ln \left(\frac{p + \sqrt{p^2 + q^2} \tanh ax}{p - \sqrt{p^2 + q^2} \tanh ax} \right)$$

<*)+=

)clear all

--S 76

aa:=integrate(1/(p^2+q^2*sinh(a*x)^2),x)

--R

--R

--R (1)

--R [

--R log

--R $q^4 \sinh^4(ax) + 4q^4 \cosh^3(ax) \sinh(ax)$

--R + $(6q^4 \cosh^2(ax) - 2q^4 + 4p^2 q^2) \sinh^2(ax)$

--R + $(4q^4 \cosh^3(ax) + (-4q^4 + 8p^2 q^2) \cosh^2(ax)) \sinh(ax)$

--R + $q^4 \cosh^4(ax) + (-2q^4 + 4p^2 q^2) \cosh^2(ax) + q^4 - 8p^2 q^2 + 8p^4$

--R * $\frac{1}{\sqrt{-q^2 + p^2}}$

--R + $(4p^4 q^2 - 4p^3 q) \sinh^2(ax) + (8p^4 q^2 - 8p^3 q) \cosh^2(ax) \sinh(ax)$

--R + $(4p^4 q^2 - 4p^3 q) \cosh^2(ax) - 4p^4 q^2 + 12p^3 q^2 - 8p^5$

--R / $q^2 \sinh^4(ax) + 4q^2 \cosh^3(ax) \sinh(ax)$

--R + $(6q^2 \cosh^2(ax) - 2q^2 + 4p^2) \sinh^2(ax)$

--R + $2^2 \quad 3^2 \quad 2^2 \quad 2^2 \quad 2^2 \quad 4$

```

--R      (4q cosh(a x) + (- 4q + 8p )cosh(a x))sinh(a x) + q cosh(a x)
--R      +
--R      2 2      2 2      2 2
--R      (- 2q + 4p )cosh(a x) + q
--R      /
--R      +-----+
--R      | 2 2
--R      2a p\|- q + p
--R      ,
--R      atan
--R      2 2      2 2      2 2      2 2      2 2      2 2
--R      (q sinh(a x) + 2q cosh(a x)sinh(a x) + q cosh(a x) - q + 2p )
--R      *
--R      +-----+
--R      | 2 2
--R      \|q - p
--R      /
--R      2 3
--R      2p q - 2p
--R      /
--R      +-----+
--R      | 2 2
--R      a p\|q - p
--R      ]
--R
--R                                          Type: Union(List Expression Integer,...)
--E

```

--S 77

bb:=1/(2*a*p*sqrt(p^2+q^2))*log((p+sqrt(p^2+q^2)*tanh(a*x))/(p-sqrt(p^2+q^2)*tanh(a*x))

```

--R
--R      +-----+
--R      | 2 2
--R      - tanh(a x)\|q + p - p
--R      log(-----)
--R      +-----+
--R      | 2 2
--R      tanh(a x)\|q + p - p
--R      (2) -----
--R      +-----+
--R      | 2 2
--R      2a p\|q + p
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

--S 78

cc1:=aa.1-bb

```

--R
--R (3)
--R      +-----+
--R      | 2  2
--R      \|q  + p
--R      *
--R      log
--R      4      4      4      3
--R      q sinh(a x) + 4q cosh(a x)sinh(a x)
--R      +
--R      4      2      4      2 2      2
--R      (6q cosh(a x) - 2q + 4p q )sinh(a x)
--R      +
--R      4      3      4      2 2
--R      (4q cosh(a x) + (- 4q + 8p q )cosh(a x))sinh(a x)
--R      +
--R      4      4      4      2 2      2      4      2 2      4
--R      q cosh(a x) + (- 2q + 4p q )cosh(a x) + q - 8p q + 8p
--R      *
--R      +-----+
--R      | 2  2
--R      \|- q  + p
--R      +
--R      4      3 2      2      4      3 2
--R      (4p q - 4p q )sinh(a x) + (8p q - 8p q )cosh(a x)sinh(a x)
--R      +
--R      4      3 2      2      4      3 2      5
--R      (4p q - 4p q )cosh(a x) - 4p q + 12p q - 8p
--R      /
--R      2      4      2      3
--R      q sinh(a x) + 4q cosh(a x)sinh(a x)
--R      +
--R      2      2      2      2      2
--R      (6q cosh(a x) - 2q + 4p )sinh(a x)
--R      +
--R      2      3      2      2      2      4
--R      (4q cosh(a x) + (- 4q + 8p )cosh(a x))sinh(a x) + q cosh(a x)
--R      +
--R      2      2      2      2
--R      (- 2q + 4p )cosh(a x) + q
--R      +
--R      +-----+
--R      +-----+
--R      | 2  2
--R      | 2  2      - tanh(a x)\|q  + p      - p
--R      - \|- q  + p  log(-----)

```

```

--R
--R
--R          +-----+
--R          | 2  2
--R          tanh(a x)\|q  + p  - p
--R /
--R          +-----+ +-----+
--R          | 2  2 | 2  2
--R          2a p\|- q  + p  \|q  + p
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

--S 79 14:556 Axiom cannot simplify this expression
cc2:=aa.2-bb

```

--R
--R (4)
--R
--R          +-----+
--R          | 2  2
--R          - tanh(a x)\|q  + p  - p
--R - \|q  - p  log(-----)
--R
--R          +-----+
--R          | 2  2
--R          tanh(a x)\|q  + p  - p
--R +
--R          +-----+
--R          | 2  2
--R          2\|q  + p
--R *
--R          atan
--R          2  2  2  2  2  2  2  2  2  2
--R          (q sinh(a x) + 2q cosh(a x)sinh(a x) + q cosh(a x) - q + 2p )
--R *
--R          +-----+
--R          | 2  2
--R          \|q  - p
--R /
--R          2  3
--R          2p q - 2p
--R /
--R          +-----+ +-----+
--R          | 2  2 | 2  2
--R          2a p\|q  - p  \|q  + p
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```


18 [1]:14.557 $\int x^m \sinh ax \, dx$

$$\int x^m \sinh ax = \frac{x^m \cosh ax}{a} - \frac{m}{a} \int x^{m-1} \cosh ax$$

```
(*)+≡
)clear all
```

```
--S 80      14:557 Axiom cannot compute this integral
```

```
aa:=integrate(x^m*sinh(a*x),x)
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--I (1) |x sinh(%N a)m d%N
```

```
--R ++
```

```
--R
```

```
--E
```

Type: Union(Expression Integer,...)

19 [1]:14.558 $\int \sinh^n dx$

$$\int \sinh^n = \frac{\sinh^{n-1} ax \cosh ax}{an} - \frac{n-1}{n} \int \sinh^{n-2} ax$$

```
(*)+≡
)clear all
```

```
--S 81      14:558 Axiom cannot compute this integral
```

```
aa:=integrate(sinh(a*x)^n,x)
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--I (1) |x sinh(%N a)n d%N
```

```
--R ++
```

```
--R
```

```
--E
```

Type: Union(Expression Integer,...)

20 [1]:14.559 $\int \frac{\sinh ax}{x^n} dx$

$$\int \frac{\sinh ax}{x^n} = \frac{-\sinh ax}{(n-1)x^{n-1}} + \frac{a}{n-1} \int \frac{\cosh ax}{x^{n-1}}$$

```
(*)+≡
)clear all
```

```
--S 82 14:559 Axiom cannot compute this integral
```

```
aa:=integrate(sinh(a*x)/x^n,x)
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--I      x
--I      ++  sinh(%T a)
--I (3)  | ----- d%T
--R      ++      n
--I      %T
```

```
Type: Union(Expression Integer,...)
```

```
--E
```

21 [1]:14.560 $\int \frac{dx}{\sinh^n ax}$

$$\int \frac{1}{\sinh^n ax} = \frac{-\cosh ax}{a(n-1)\sinh^{n-1} ax} - \frac{n-2}{n-1} \int \frac{1}{\sinh^{n-2} ax}$$

```
(*)+≡
)clear all
```

```
--S 83 14:560 Axiom cannot compute this integral
```

```
aa:=integrate(1/sinh(a*x)^n,x)
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R      x
--R      ++      1
--I (1)  | ----- d%N
--R      ++      n
--I      sinh(%N a)
```

```
Type: Union(Expression Integer,...)
```

```
--R
```

```
--E
```

22 [1]:14.561 $\int \frac{x dx}{\sinh^n ax}$

$$\int \frac{x}{\sinh^n ax} = \frac{-x \cosh ax}{a(n-1) \sinh^{n-1} ax} - \frac{1}{a^2(n-1)(n-2) \sinh^{n-2} ax} - \frac{n-2}{n-1} \int \frac{x}{\sinh^{n-2} ax}$$

<*)+≡

)clear all

--S 84 14:561 Axiom cannot compute this integral

aa:=integrate(x/sinh(a*x)^n,x)

--R

--R

--R

--I

--R

--I

--R

--I

--R

--E

)spool

)lisp (bye)

$$(1) \int \frac{x}{\sinh^n(ax)} dx$$

Type: Union(Expression Integer,...)

References

- [1] Spiegel, Murray R. *Mathematical Handbook of Formulas and Tables*
Schaum's Outline Series McGraw-Hill 1968 p86